MES1 Lois de Coulomb du frottement de glissement

I Distance d'arrêt

Un jeton est lancé sur un plan horizontal avec une vitesse initiale de norme v_0. Quelle distance parcourt-il avant de s'arrêter ? La réponse fait intervenir un coefficient de frottement que l'on définira.

II Équilibre sur un plateau tournant

Sur un plateau horizontal $\mathcal{P}$, tournant autour d'un axe fixe vertical à vitesse angulaire constante ω, on dépose un jeton à distance r de l'axe de rotation. À quelle condition le jeton reste-t-il là où on l'a posé ? La réponse fait intervenir un coefficient de frottement que l'on définira.

III Équilibre (d'/sur) une échelle

1. Une échelle posée sur le sol et appuyée contre un mur est assimilée à une tige rigide homogène AB de longueur $2l$ et de masse m. Les frottements sur le sol et contre le mur ont un coefficient commun f. Quelle est la position d'équilibre limite α_{lim} autorisant cet équilibre ? Commenter les cas $f = 0$ et $f = 1$.
2. On suppose l'échelle appuyée sur un mur de glace (frottement négligeable). Le frottement au niveau du sol est toujours caractérisé par le coefficient f. Une personne modélisée par une masse ponctuelle M désire être sûre que l'échelle ne bougera pas quelle que soit sa position sur l'échelle. À quelle condition sur α est-ce le cas ?

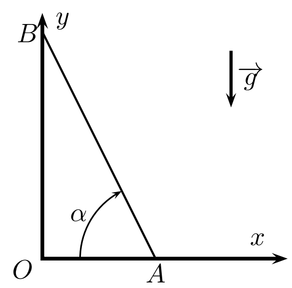

FIGURE 1 – Echelle en équilibre

IV Tige sur un clou

Une tige de masse m et de longueur $2l$ est appuyée en O sur un clou. Son mouvement se fait dans un plan vertical et à l'instant initial $t = 0$, elle est lâchée sans vitesse à partir d'une position horizontale. Son centre de masse G est à la distance a du point O et le coefficient de frottement de la tige sur le clou vaut f. Trouver les composantes de la réaction du clou sur la tige en fonction de θ et en déduire l'angle à partir duquel la tige glisse. On donne le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation : $J_{O,\Delta} = \frac{1}{3}ml^2 + ma^2$.

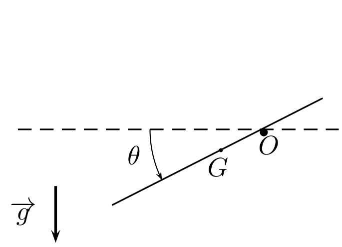

FIGURE 2 –

V Manipulation avec une règle. Expérience suggérée par A.Sommerfeld

Lorsqu'on pose les extrémités d'une règle horizontale très fine sur ses deux index et qu'on rapproche les deux doigts, on constate que la règle glisse alternativement sur chaque doigt, en étant fixe par rapport à l'autre doigt, et que les doigts se rejoignent invariablement au milieu de la règle. Le but de l'exercice est d'interpréter cette expérience.

On note I_1 et I_2 les points de contact entre la règle et les deux doigts, G le centre d'inertie de la règle, et on pose $x_1 = GI_1$ et $x_2 = GI_2$ (attention ces grandeurs sont donc positives). On suppose que le doigt (1) est immobile et que le doigt (2) se déplace à vitesse constante en direction du doigt (1) à partir de l'instant $t = 0$. À l'instant initial la règle est immobile et $x_1(0) = a$. On appelle f_s le coefficient de frottement statique et f_d le coefficient de frottement dynamique entre les doigts et la règle. On rappelle que $f_s > f_d$.

1. *Question préliminaire.* Au cours du mouvement la règle est en translation. On va d'abord établir les expressions des composantes normales N_1 et N_2 des réactions des doigts, indépendamment de la nature du mouvement de la règle. Pour cela on se place dans le référentiel $\mathcal{R}_G = (G, x, y, z)$ lié à la règle. Il est *a priori* non galiléen et on admet qu'ici la force d'inertie d'entraînement est appliquée en G. En appliquant le théorème du moment cinétique à la règle, très fine on le rappelle, en G dans $\mathcal{R}_G$ établir une relation entre N_1, N_2, x_1 et x_2. En déduire les expressions de N_1 et N_2, en fonction de m, g, x_1 et x_2 uniquement.
2. Durant la première phase du mouvement la règle est fixe par rapport au doigt (1) et glisse sur le doigt (2). Déterminer, en fonction de a, f_s et f_d, l'expression de x_2 au moment où cette phase s'achève.
3. Donner l'expression de l'accélération de la règle au moment où elle commence à glisser sur le doigt (1). En déduire l'ordre de grandeur du temps au bout duquel la règle a une vitesse égale à la vitesse v du doigt (2), sachant que $v \simeq 1$ cm·s^{-1}, $f_s = 0,5$, $f_d = 0,3$ et $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.
4. Dans la troisième phase suivante la règle est fixe par rapport au doigt (2) et glisse sur le doigt (1). Pourquoi peut-on dire que x_2 a pratiquement la valeur déterminée à la question 2 durant cette phase ? Quelle est la valeur de x_1 au moment où cette phase s'achève ?
5. Montrer que les deux doigts se rejoignent en G.

VI Mouvement d'une corde de violon

On peut modéliser le mouvement du point de la corde d'un violon situé sous l'archet par le dispositif suivant : un bloc de masse M est posé sur tapis roulant horizontal initialement immobile. Le coefficient de frottement entre le bloc et le tapis est noté f_s dans le cas statique et $f_d < f_s$ dans le cas dynamique. Un ressort horizontal, de raideur k, de longueur à vide l_0, dont une extrémité est immobile a son autre extrémité fixée au bloc. Dans l'état initial le ressort n'est ni tendu ni comprimé.
À l'instant initial on met le tapis en marche. Il se déplace alors à la vitesse constante $v_0\vec{u}_x$.

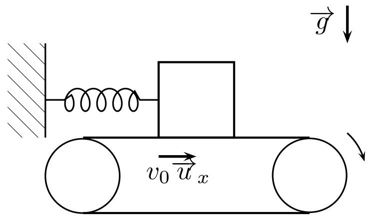

FIGURE 3 – C'est un violon, ça... ?

1. Que représentent les différents éléments du modèle dans le système étudié originellement (violon) ?
2. On note $X(t)$ l'abscisse du bloc comptée à partir de sa position initiale. Étudier les différentes phases du mouvement.

VII Entraînement par frottement

Une barre de masse m_1 est placée sur une planche de masse m_2, et l'ensemble repose sans frottement sur un plan horizontal. Le facteur de frottement entre la barre et la planche est μ. On exerce sur la planche une force horizontale $\overrightarrow{F} = \alpha t \overrightarrow{u}_x$ dont l'intensité croît linéairement avec le temps ($\alpha = cte > 0$).

1. Écrire les équation différentielles du mouvement de la barre et de la planche, sans faire d'hypothèse sur la nature de leur mouvement relatif.
2. Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans la phase de non-glissement ? Déterminer l'instant t_0 à partir duquel la barre glisse sur la planche.
3. Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans la phase de glissement ?

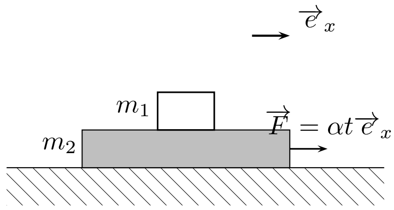

FIGURE 4 –

VIII Galets de Timoschenko

Deux cylindres parallèles, de même rayon R, dont les axes fixes et horizontaux sont disposés à la distance $2L > 2R$ l'un de l'autre dans un même plan horizontal, sont animés d'un mouvement de rotation uniforme à la même vitesse angulaire ω mais en sens inverse l'un de l'autre.
Une planche homogène, de masse m, de faible épaisseur, de grande longueur, est posée sur ces cylindres. On suppose la vitesse angulaire ω suffisamment grande pour que la planche glisse en permanence sur les deux cylindres, f désignant le coefficient de frottement correspondant. On repère par x la position du centre d'inertie de la planche par rapport au milieu des deux cylindres.

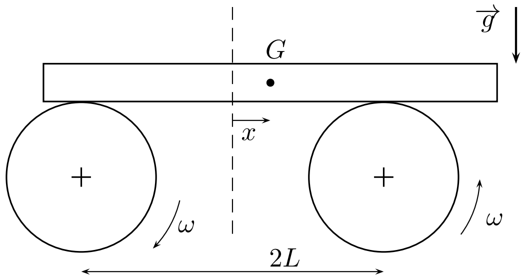

FIGURE 5 – Expérience des galets de Timoschenko

Étudier le mouvement de la planche.

Remarque : posé ainsi cet exercice est hors programme car nous ne sommes pas à strictement parler dans le cas d'un mouvement de translation d'un solide par rapport à un autre. Pour pouvoir traiter cet exercice il suffit de comprendre que la vitesse de glissement de la planche par rapport à un rouleau doit être définie ici par $\overrightarrow{v}_{\text{planche/rouleau}} = \overrightarrow{v}(M_1 \in \text{planche})_{/\mathcal{R}_{\text{laboratoire}}} - \overrightarrow{v}(M_2 \in \text{rouleau})_{/\mathcal{R}_{\text{laboratoire}}}$, M_1 étant le point de la planche confondu avec le point de contact (et qui a donc un mouvement rectiligne avec comme vitesse celle de la planche) et M_2 étant le point du rouleau confondu avec le point de contact (et qui a donc un mouvement circulaire à cause de la rotation du rouleau).

IX Amarrage d'un bateau

Un fil de masse négligeable, sans raideur, est enroulé d'un angle α sur un arbre cylindrique de rayon a. le contact arbre fil est caractérisé par un coefficient de frottement f. On exerce une force $\overrightarrow{F}_A$ de norme F_A sur l'extrémité A du fil, et on cherche la valeur minimale de la norme F_B de la force $\overrightarrow{F}_B$ à appliquer sur l'autre extrémité B du fil pour qu'il soit en équilibre.

1. On repère un point courant M du tronçon de fil en contact avec l'arbre pas l'angle $\theta \in [0, \alpha]$. $\overrightarrow{t}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire tangent au fil dans le sens des θ croissants ; $\overrightarrow{n}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire normal au fil orienté de l'arbre vers l'extérieur.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{t}(\theta + d\theta)$ sur la base $(\overrightarrow{t}(\theta), \overrightarrow{n}(\theta))$ en se limitant au premier ordre en $d\theta$.

2. On modélise les actions qu'exerce le tronçon de fil $[\theta, \alpha]$ sur le tronçon de fil $[0, \theta]$ par une force $\overrightarrow{T}(\theta) = T(\theta)\overrightarrow{t}(\theta)$ appelée tension du fil en M. On raisonne sur un tronçon de fil MM' compris entre θ et $\theta + d\theta$. Ce tronçon est soumis aux forces exercées par les tronçons AM et $M'B$, ainsi qu'à la force de contact $d\overrightarrow{R}$ qu'exerce l'arbre sur lui.
Écrire la condition nécessaire d'équilibre de MM' reliant $\overrightarrow{T}(\theta)$, $\overrightarrow{T}(\theta + d\theta)$ et $d\overrightarrow{R}$.
3. Pour $d\theta$ suffisamment petit, on peut utiliser le modèle du contact ponctuel entre deux solides tel qu'il est donnée par les lois de Coulomb et écrire $d\overrightarrow{R} = dR_t\overrightarrow{t}(\theta) + dR_n\overrightarrow{n}(\theta)$.
Établir les deux équations scalaires reliant $T(\theta)$, $T(\theta + d\theta)$, dR_t et dR_n.
4. Dans la situation envisagée, quels sont les signes de dR_t et dR_n ? En déduire la relation valable, à la limite du glissement, entre dR_t et dR_n.
5. En déduire que la tension $T(\theta)$ vérifie l'équation différentielle :
$$\frac{dT}{d\theta} + f \times T(\theta) = 0$$
6. Intégrer cette équation et en déduire la relation entre F_A, F_B, f et α.
7. A.N. : pour une corde d'amarrage sur un arbre métallique $f = 0,6$. Calculer F_B/F_A pour $\alpha = \pi$.
Un matelot peut exercer confortablement une force de 100 N ; pour quelle valeur minimale α_0 de α peut-il résister à une force de 10^4 N exercée par le bateau sur le premier brin de la corde ?
Dans la disposition précédente, quelle force devrait-il exercer pour tenter de faire la corde afin de tirer le bateau vers lui ?

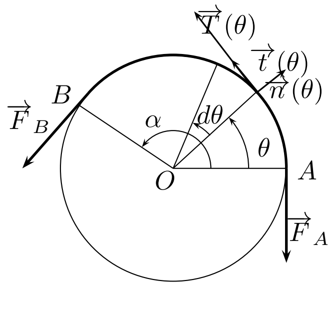

FIGURE 6 –

Éléments de réponses

I $L = \frac{v_0^2}{2 f_d g}$, avec f_g coefficient de frottement dynamique.

II $\omega^2 r \leq f_s g$, f_s étant le coefficient de frottement statique.

III

1. $\tan \alpha_{lim} = \frac{1-f^2}{2f}$
2. $\tan \alpha > \frac{2M+m}{2f(M+m)}$

IV $T = mg \sin\theta \left(\frac{l^2+9a^2}{l^2+3a^2} \right)$, $N = mg\cos\theta \left(\frac{l^2}{l^2+3a^2} \right)$, $\tan\theta_l = f\left(\frac{l^2}{l^2+9a^2} \right)$.

V

VI

VII $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{\alpha t}{m_1+m_2}$ jusqu'à $t_0 = \frac{\mu g(m_1+m_2)}{\alpha}$, puis $\ddot{x}_1 = \mu g$ et $\ddot{x}_2 = \frac{\alpha t - \mu g m_1}{m_2}$

IX

1. $\overrightarrow{t}(\theta) - d\theta \overrightarrow{n}(\theta)$
2. $\overrightarrow{T}(\theta + d\theta) - \overrightarrow{T}(\theta) + d\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.
3. $T(\theta + d\theta) - T(\theta) + dR_t = 0$ et $-d\theta T(\theta + d\theta) + dR_n = 0$
4. $dR_t = f dR_n$
5.
6. $F_B = F_A . e^{-f\alpha}$