Travaux Dirigés de M_7

Conseils pour ce TD :

- Les mêmes que ceux de M_5.
- Privilégier la version scalaire du théorème du moment cinétique.
- Pour déterminer le moment d'une force par rapport à un point ou sa projection sur un axe, faire une figure sur laquelle cette force doit apparaître, utiliser ensuite la notion de bras de levier ou la décomposition des vecteurs suivant les vecteurs de base.
- Utiliser une technique analogue pour le calcul d'un moment cinétique.
- Toujours vérifier la cohérence des résultats en utilisant par exemple la règle de la main droite.

Exercice 1 : Oscillateur en rotation

On considère un point matériel M de masse m, attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité de ce ressort est attachée en un point, ?xe par rapport au référentiel terrestre que l'on supposera galiléen, et autour duquel l'ensemble est libre de tourner dans un plan horizontal. Il est lancé avec une vitesse initiale v_i orthoradiale, et une longueur initiale $r = r_i$. On néglige tout frottement.

1. Montrer que le moment cinétique de ce système se conserve au cours du mouvement. En déduire une expression de θ en fonction de r et des paramètres initiaux, et montrer qu'il est possible de résumer le mouvement à une équation différentielle portant uniquement sur la variable r.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur r_i et v_i pour que le mouvement soit circulaire.

Exercice 2 : Le cauchemar de Philippe

Le petit Philippe passe une nuit agitée. Il rêve que la loi de la gravitation est élevée à la puissance $\frac{5}{2}$. Dans son cauchemar, les journées s'écoulaient dans l'angoisse d'une catastrophe imminente. Élevée à la puissance 5/2, la loi de la gravitation ne permettait plus qu'une orbite circulaire particulièrement instable autour du Soleil. Les prédicateurs de tout poil ne manquaient aucune occasion d'annoncer la ?n du monde. Certains affirmaient que la Terre s'écraserait bientôt sur le Soleil, d'autres pensaient qu'elle dériverait vers l'in ?ni et au-delà.
Dans le cauchermar de Philippe, la loi de la gravitation est remplacée par une force de type $\vec{F} = -\frac{k}{r^5}\vec{e}_r$, avec $k > 0$.

1. Définir et exprimer une énergie potentielle effective pour la Terre.
2. Montrer qu'une trajectoire circulaire est possible.
3. Discuter sa stabilité.

Exercice 3 : Satellites

La station spatiale internationale (ou ISS, masse m) décrit une orbite circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 300$ km (orbite dite basse). On donne le rayon de la Terre $R_T = 6{,}4.10^3$ km et la valeur du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}.

1. Pourquoi l'ISS est-elle placée sur une orbite basse ?
2. Déterminer la vitesse de l'ISS sur son orbite, ainsi que la valeur de sa période de révolution T.
3. Un second satellite est également en orbite circulaire autour de la Terre, à une altitude $h' = 2h$. Que vaut la période T de ce satellite ?

Exercice 4 : Premier vol habité (par un homme)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse $m = 4725$ kg. Les altitudes au périgée P et à l'apogée A étaient $z_P = 180$ km et $z_A = 327$ km.
Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z, de z_P, z_A, M_T, R_T (masse et rayon de la Terre) et de $\mathcal{G}$, la constante de gravitation. Calculer v en P et en A.

Exercice 5 : Satellite et frottements

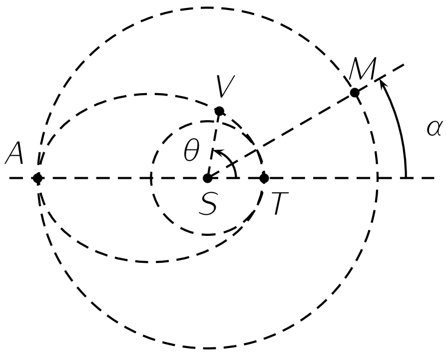
Un satellite M de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$ considéré comme galiléen.
On notera Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$.

1. Déterminer la vitesse v_0 du satellite, l'énergie potentielle E_{p0}, cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, M_T la masse de la Terre et des données.
2. Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ. Sa vitesse est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T. Déterminer E_{p1}, E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$.
   Où doit-on placer les bases de lancement pour que ΔE soit minimale ?
3. On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T, il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$ Quel est le signe de α ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de t, le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.

Exercice 6 : Force de gravitation

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par la Terre de centre T et de masse M_T sur un objet A de masse m en fonction de la Constante de gravitation $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI et de $r = TA$.
2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du point A ayant une vitesse v à la surface de la Terre, en déduire la valeur de la vitesse de libération v_L : vitesse minimale donnée à l'objet pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Calculer v_L. ($M_T = 6.10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km).
4. La Terre décrit autour du soleil S de masse $M_S = 0{,}33.10^6 M_T$ une orbite pratiquement circulaire de rayon $a = 150.10^6$ km. Déterminer en fonction de a, la position d'équigravité du système $T - S$ par rapport à la Terre ; endroit de l'espace où la force de gravitation due à S est compensée par celle due à T.

Exercice 7 : Voyage Terre – Mars



Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial V de masse $m = 1000$ kg, est transféré depuis la Terre T jusqu'à la planète Mars M. Ce transfert s'effectue selon une orbite elliptique (ellipse de Hohmann) tangente aux deux orbites coplanaires pratiquement circulaires, de T et M, de rayons $r_T = ST = 150$ millions de km et $r_M = SM = 230$ millions de km, et dont le soleil est un foyer.

On négligera l'influence des autres corps et on ne considérera que l'attraction solaire. Masse du soleil $M_S = 2.10^{30}$ kg et $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI. Déterminer en fonction de r_T, r_M, $\mathcal{G}$ et M_S, puis calculer :

1. L'excentricité e et le paramètre p de l'orbite de transfert de Hohmann.
2. La durée τ de ce voyage.
3. La variation de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement depuis l'orbite terrestre puis lors de son arrivée aux abords de Mars.
4. L'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert.
5. Mars doit se situer en A au même instant qua le vaisseau V. En déduire la position que doit avoir M par rapport à T à l'instant du départ : angle $\alpha = (ST,SM)$.