CALCUL DIFFÉRENTIEL

Preuve du Théorème 11

On se limite au cas $p = 2$.
On suppose que $x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ avec pour tout $t \in I$, $(x(t),y(t)) \in U$.
On pose pour tout $t \in I$, $g(t) = f(x(t),y(t))$.

Soit $t_0 \in I$.
On a $(x(t_0),y(t_0)) \in U$ et $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ donc f admet un développement limité à l'ordre 1 au point $(x(t_0),y(t_0))$. Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{(x,y)\to(x(t_0),y(t_0))} \varepsilon(x,y) = 0$ telle que pour tout $(x,y) \in U$:

$$f(x,y) = f(x(t_0),y(t_0)) + \partial_1 f(x(t_0),y(t_0)).(x-x(t_0)) + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)).(y-y(t_0)) + \|(x-x(t_0),y-y(t_0))\|\varepsilon(x,y).$$

Pour tout $t \in I$, comme $(x(t),y(t)) \in U$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x(t),y(t)) = f(x(t_0),y(t_0)) + \partial_1 f(x(t_0),y(t_0)).(x(t)-x(t_0)) + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)).(y(t)-y(t_0)) \\ + \|(x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0))\|\varepsilon(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

Comme $t_0 \in I$ et $x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, x admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.
Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{t\to t_0} \varepsilon_1(t) = 0$ telle que pour tout $t \in I$:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_1(t).$$

Comme $t_0 \in I$ et $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, x admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.
Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{t\to t_0} \varepsilon_2(t) = 0$ telle que pour tout $t \in I$:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t).$$

En remplaçant dans l'égalité ci-dessus, on obtient alors pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} f(x(t),y(t)) = f(x(t_0),y(t_0)) &+ \partial_1 f(x(t_0),y(t_0)).(x'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_1(t)) \\ &+ \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)).(y'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t)) \\ &+ \|(x'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_1(t), y'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t))\|\varepsilon(x(t),y(t)) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} g(t) = g(t_0) &+ \big(\partial_1 f(x(t_0),y(t_0)).x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)).y'(t_0)\big)(t-t_0) \\ &+ (t-t_0)\big(\partial_1 f(x(t_0),y(t_0))\varepsilon_1(t) + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0))\varepsilon_2(t)\big) \\ &+ |t-t_0|\,\|(x'(t_0)+\varepsilon_1(t), y'(t_0)+\varepsilon_2(t))\|\varepsilon(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

En posant pour tout $t \in I$:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \partial_1 f(x(t_0),y(t_0)) \underbrace{\varepsilon_1(t)}_{\xrightarrow[t\to t_0]{} 0} + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)) \underbrace{\varepsilon_2(t)}_{\xrightarrow[t\to t_0]{} 0} + \underbrace{s(t)}_{\text{borné}} \underbrace{\|(x'(t_0)+\varepsilon_1(t), y'(t_0)+\varepsilon_2(t))\|}_{\xrightarrow[t\to t_0]{} \|(x'(t_0),y'(t_0))\|} \underbrace{\varepsilon(x(t),y(t))}_{\xrightarrow[t\to t_0]{} 0}$$

où $s(t) = 1$ si $t - t_0 \geqslant 0$ et $s(t) = -1$ si $t - t_0 \leqslant 0$, on vérifie aisément que $\lim\limits_{t\to t_0} \tilde{\varepsilon}(t) = 0$ et :

$$g(t) = g(t_0) + \big(\partial_1 f(x(t_0),y(t_0)).x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0),y(t_0)).y'(t_0)\big)(t-t_0) + (t-t_0)\tilde{\varepsilon}(t).$$

On a ainsi écrit le développement limité à l'ordre 1 de g en t_0.
On en déduit que g est dérivable en t_0 et $g'(t_0) = \partial_1 f(x(t_0), y(t_0)).x'(t_0) + \partial_2 f(x(t_0), y(t_0)).y'(t_0)$.

Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, on en déduit que g est dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \partial_1 f(x(t), y(t)).x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t)).y'(t).$$

Par continuité de x, y, x', y', $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$, on obtient par les théorèmes généraux que g' est continue sur I. D'où $g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.