Corrigé de CCP PC 2008 Mathématiques 1

PARTIE I

I.1 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. La matrice $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est une matrice carrée réelle et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) Soit $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ admettant -1 et 1 comme valeurs propres. Alors $(X-1)(X+1)$ divise son polynôme caractéristique χ_M. Comme χ_M est un polynôme unitaire de degré 2, on en déduit :

$$\chi_M = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-1) = \mathrm{X}^2 - 1.$$

I.2 b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle symétrique d'ordre 2, positive, et son polynôme caractéristique est :

$$\chi_S = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 \\ -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-1),$$

donc : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{-1, 1\}$, donc S convient.

I.3 La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient, car S est carrée réelle symétrique d'ordre 3, positive, et son polynôme caractéristique est :

$$\chi_S = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 \\ -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = (\mathrm{X}+1)\mathrm{X}(\mathrm{X}-1),$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{-1, 0, 1\}$.

I.4 La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient, car S est carrée réelle symétrique d'ordre 4, positive, et son polynôme caractéristique est, par utilisation du théorème sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$\chi_S = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{X} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 \\ -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix}^2 = (\mathrm{X}^2-1)^2 = (\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}-1)^2,$$

donc les valeurs propres de S sont $-1, -1, 1, 1$ comptées avec multiplicité.

I.5 Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une matrice S carrée réelle positive (et symétrique) d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 0$.
On a : $\chi_S = (\mathrm{X}+1)^2\mathrm{X}$, donc χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$.
D'après le cours, on a alors : $\mathrm{tr}\,(S) = (-1) + (-1) + 0 = -2 < 0$.
Mais, comme S est positive, les éléments diagonaux de S en particulier sont positifs, donc $\mathrm{tr}\,(S) \geqslant 0$, contradiction.

On conclut qu'il n'existe aucune matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 0$.

I.6 a) Notons J la matrice carrée d'ordre n dont tous les cœfficients valent 1.
On a $H = (a-b)I_n + bJ$.
Déterminons les valeurs propres de J.
Comme J est une matrice de rang 1, 0 est valeur propre de J et par le théorème du rang, $\dim(E_0(J)) = n-1$.
Notons V le vecteur-colonne dont tous les cœfficients valent 1. On a $JV = nV$ et $V \neq 0_{n,1}$ donc n est une valeur propre de J avec $\dim(E_n(J)) \geqslant 1$.
La somme des dimensions des sous-espaces propres ne pouvent excéder n, on en déduit qu'elle vaut n et $Sp(J) = \{0, n\}$.
La matrice J est donc diagonalisable, il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $J = P\mathrm{diag}\,(0, \ldots, 0, n)P^{-1}$.
Par suite, $H = P((a-b)I_n + b\mathrm{diag}\,(0, \ldots, 0, n))P^{-1} = P\mathrm{diag}\,(a-b, \ldots, a-b, a-b+nb)P^{-1}$.
Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres donc les valeurs propres de H sont $a + (n-1)b$ (multiplicité 1) et $a-b$ (multiplicité $n-1$).

I.6 b) Il est clair que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice H de la question a) est carrée réelle symétrique d'ordre n.
Pour $(a,b) = (n,-1)$, on a :

$$a + (n-1)b = n - (n-1) = 1 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a - b = n + 1 \geqslant 0,$$

donc les valeurs propres de H sont toutes positives.

Mais les termes de H ne sont pas tous positives car $b = -1 < 0$.

On conclut qu'une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n, positive, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles n'est pas nécessairement positive.

PARTIE II

II.1 a) En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, on a :

$$(X \,|\, Y)_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^\mathsf{T} Y,$$

et comme le produit scalaire est symétrique : $(X \,|\, Y)_n = (Y \,|\, X)_n = Y^\mathsf{T} X$.

II.1 b) D'après a) : $X^\mathsf{T} S Y = X^\mathsf{T}(SY) = (X \,|\, SY)_n$
et $X^\mathsf{T} S Y = X^\mathsf{T} S^\mathsf{T} Y = (SX)^\mathsf{T} Y = (SX \,|\, Y)_n$.

II.1 c) On a :

$$||PX||_n^2 = (PX \,|\, PX)_n = (PX)^\mathsf{T}(PX) = X^\mathsf{T}(P^\mathsf{T}P)X = X^\mathsf{T}\mathrm{I}_n X = X^\mathsf{T}X = ||X||_n^2,$$

donc : $||PX||_n = ||X||_n$.

NB : On pouvait aussi dire qu'on sait par le cours que l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice orthogonale est une isométrie (car la base canonique est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique).

II.2 a) On a, par produit par blocs :

$$(Z \,|\, T)_{n+p} = Z^\mathsf{T} T = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^\mathsf{T} & U^\mathsf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix} = X^\mathsf{T}Y + U^\mathsf{T}V = (X \,|\, Y)_n + (U \,|\, V)_p.$$

II.2 b) Si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et si U, V sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, alors :

$$(Z \,|\, T)_{n+p} = \underbrace{(X \,|\, Y)_n}_{=0} + \underbrace{(U \,|\, V)_p}_{=0} = 0,$$

donc Z, T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

II.2 c) La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple

$$n = 1, \;\; p = 1, \;\; X = (1), \;\; Y = (1), \;\; U = (1), \;\; V = (-1),$$

donc

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dans lequel on a $Z \perp T$ et, cependant, on n'a ni $X \perp Y$ ni $U \perp V$.

II.3 a) Remarquons d'abord que l'existence de D est assurée par le théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (par une matrice de passage orthogonale).
Il existe donc $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $S = PDP^{-1} = PDP^\mathsf{T}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix},$$

donc :

$$(DY\,|\,Y)_n = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i y_i)y_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha y_i^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n}y_i^2 = \alpha||Y||_n^2.$$

II.3 b) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Notons $Y = P^\top X$. On a :

$$\begin{aligned}(SX\,|\,X)_n = X^\top SX = X^\top(PDP^\top)X = (P^\top X)^\top D(P^\top X) \\ = Y^\top DY = (DY\,|\,Y)_n \underset{a)}{\leq} \alpha||Y||_n^2 = \alpha||P^\top X||_n^2 \underset{\text{I.1 c)}}{=} \alpha||X||_n^2,\end{aligned}$$

d'où : $\dfrac{(SX\,|\,X)_n}{||X||_n^2} \leq \alpha.$

II.3 c) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Décomposons X sur une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, ..., V_n)$ de vecteurs propres de S : $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i V_i$. On a alors :

$$(SX\,|\,X)_n = \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i V_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} x_j V_j\Big)_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \quad \text{car } \mathcal{B} \text{ orthonormale et} \quad ||X||_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

d'où :

$$\frac{(SX\,|\,X)_n}{||X||_n^2} = \alpha \iff (SX\,|\,X)_n = \alpha||X||_n^2 \iff \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \iff \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(\alpha-\lambda_i)}_{\geq 0}\underbrace{x_i^2}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff \Big(\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ \ (\alpha-\lambda_i)x_i^2 = 0\Big) \iff \Big(\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ \ \big(\lambda_i \neq \alpha \implies x_i = 0\big)\Big).$$

Ainsi, l'inégalité de b) est une égalité si et seulement si X est un vecteur propre pour la valeur propre α.

II.4 a) On a $E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) | \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \geq 0 \right\} = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) | x_i \geq 0 \right\}.$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'application polynômiale $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$ est une application continue de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ donc $\left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) | x_i \geq 0 \right\}$ est un fermé de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, E est un fermé de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

II.4 b) • L'ensemble Σ est la sphère unité de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_n$ donc c'est un ensemble fermé et borné.
En tant qu'intersection de deux fermés, C est un fermé de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
De plus, comme $C \subset \Sigma$ et Σ est borné, on en déduit que C est borné.
Ainsi, C est un fermé borné de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

II.4 c) En notant $S = (s_{ij})_{ij}$ et $X = (x_i)_i$, on a :

$$\varphi(X) = X^\top SX = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i s_{ij} x_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} s_{ij} x_i x_j.$$

Ainsi, φ est une application polynômiale donc φ est continue sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

II.4 d) Puisque φ est continue sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, et que C est un fermé borné de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ donc d'après le cours, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\mu = \operatorname*{Sup}_{X\in C}\varphi(X)$ existe et il existe $X_0 \in C$ tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

II.4 e) Comme $X_0 \in C \subset \Sigma$, on a $||X_0||_n = 1$, d'où, d'après II.3 b) :

$$\mu = \varphi(X_0) = (SX_0\,|\,X_0)_n = \frac{(SX_0\,|\,X_0)_n}{||X_0||_n^2} \leq \alpha.$$

II.5 a) i) Il est clair que $W \in E$, et on a : $||W||_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 = ||X||_n^2 = 1,$

donc $W \in \Sigma$, et on obtient : $W \in C$.

II.5 a) ii) On a, avec les notations de I.4 c) et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|\varphi(X)| = \Big| \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij} x_i x_j \Big| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |s_{ij} x_i x_j| \underset{S \geq 0}{=} \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij} |x_i|\,|x_j| = \varphi(W).$$

II.5 a iii) Par définition de μ, puisque $W \in C$, on a : $\mu \geq \varphi(W)$, donc, d'après ii) : $\mu \geq |\varphi(X)|$.
Mais, puisque X est un vecteur propre associé à la valeur propre α de S, on a $SX = \alpha X$, donc :

$$\varphi(X) = X^\top S X = X^\top(\alpha X) = \alpha X^\top X = \alpha ||X||_n^2 = \alpha.$$

On conclut : $\mu \geq |\alpha|$.

II.5 b) • D'après II.4 e) et II.5 a) iii), on a : $\alpha \geq \mu \geq |\alpha| \geq 0$, donc : $\alpha \geq 0$.

• On a donc $\mu = \alpha (\geq 0)$, puis $\varphi(W) = \mu = \alpha$. D'après II.3 c), il en résulte que W est un vecteur propre de S pour la valeur propre α.

On conclut que S admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α (le vecteur W).

II.5 c) Soit $i \in \{1, ..., n\}$.

• Par définition de α, on a déjà : $\lambda_i \leq \alpha$.

• Il existe $X_i = (x_1, ..., x_n)^\top \in \Sigma$ tel que $SX_i = \lambda_i X_i$.

D'une part : $(SX_i \,|\, X_i)_n = (\lambda_i X_i \,|\, X_i)_n = \lambda_i ||X_i||^2 = \lambda_i$.

D'autre part, considérons $W_i = (|x_1|, ..., |x_n|)^\top$.

On a : $||W_i||_n^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = ||X_i||_n^2 = 1$, donc $W_i \in \Sigma$.

De plus, par définition de W_i avec des valeurs absolues, on a : $W_i \in E$.

On a donc : $W_i \in C$, d'où, d'après II.4 : $\dfrac{(SW_i \,|\, W_i)_n}{||W_i||_n^2} = (SW_i \,|\, W_i)_n \leq \mu = \alpha$.

Puis : $(SX_i \,|\, X_i)_n = \displaystyle\sum_{k,j} s_{kj} x_k x_j \underset{S \geq 0}{\geq} -\sum_{k,j} s_{kj} |x_k|\,|x_j| = -(SW_i \,|\, W_i)_n$.

On a donc : $-\lambda_i = -(SX_i \,|\, X_i)_n \leq (SW_i \,|\, W_i) \leq \alpha$.

Ainsi : $\lambda_i \leq \alpha$ et $-\lambda_i \leq \alpha$, et on conclut : $|\lambda_i| \leq \alpha$.

PARTIE III

III.1 • Soit $i \in \{2, ..., n\}$. On a $Z_i \neq 0$ car $X_i \neq 0$, et :

$$M_s Z_i = \begin{pmatrix} A & sX_1Y_1^\top \\ sY_1X_1^\top & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1 \underbrace{X_1^\top X_i}_{=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i Z_i,$$

donc Z_i est un vecteur propre de M_s pour la valeur propre α_i.

• Soit $j \in \{2, ..., p\}$. On a $T_j \neq 0$ car $Y_j \neq 0$, et :

$$M_s T_j = \begin{pmatrix} A & sX_1Y_1^\top \\ sY_1X_1^\top & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sX_1 \underbrace{Y_1^\top Y_j}_{=0} \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j Y_j \end{pmatrix} = \beta_j \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix} = \beta_j T_j,$$

donc T_j est un vecteur propre de M_s pour la valeur propre β_j.

III.2 a) On a :

$$||V(\theta)||_{n+p}^2 \underset{\text{III.2 a)}}{=} ||(\cos\theta) X_1||_n^2 + ||(\sin\theta) Y_1||_p^2 = \cos^2\theta ||X_1||_n^2 + \sin^2\theta ||Y_1||_p^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

donc $V(\theta)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

III.2 b) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R})$ telles que, en notant $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $E = \operatorname{diag}(\beta_1, ..., \beta_p)$, on ait : $A = PDP^{-1}$ et $B = QEQ^{-1}$, d'où, par produit par blocs :

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & QEQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

En notant $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, il est clair que $R \in \mathbf{O}_{n+p}(\mathbb{R})$ et que $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Il en résulte que le spectre de M_0 est : $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_p$, avec multiplicité.

III.2 c) i) On a, puisque $\theta_1 \in \left] -\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\theta_1 = 0 \iff \tan\theta_1 = 0 \iff \beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + 4s^2} = 0$$

$$\iff \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2} = \alpha_1 - \beta_1 \implies (\alpha_1-\beta_1)^2 + 4s^2 = (\alpha_1-\beta_1)^2 \implies 4s^2 = 0 \implies s = 0,$$

contradiction, donc $\theta_1 \neq 0$.

III.2 c) ii) On a : $(\tan\theta_1)(\tan\theta_2) = (\tan\theta_1)\Big(\tan\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)\Big) = (\tan\theta_1)(-\text{cotan}\,\theta_1) = -1$.

III.2 c) iii) On a :

$$\tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1} = -\frac{2s}{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2}}$$
$$= -\frac{2s\big(\beta_1-\alpha_1-\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2}\big)}{(\beta_1-\alpha_1)^2 - \big((\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2\big)} = \frac{\beta_1-\alpha_1-\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+4s^2}}{2s}.$$

d'où :

$$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{s}.$$

Ainsi, $\tan\theta_1$ et $\tan\theta_2$ sont solutions de l'équation, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$:

$$t^2 - \frac{\beta_1-\alpha_1}{s}t + (-1) = 0,$$

c'est-à-dire : $st + (\alpha_1 - \beta_1) - \frac{s}{t} = 0$ ou encore : $\alpha_1 + st = \beta_1 + \frac{s}{t}$.

Ainsi, θ_1 et θ_2 vérifient l'équation $\alpha_1 + s\tan\theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta}$.

III.2 c) iv) On a, en notant θ pour θ_1 ou θ_2 :

$$M_sV(\theta) = \begin{pmatrix} A & sX_1Y_1^{\mathsf{T}} \\ sY_1X_1^{\mathsf{T}} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\cos\theta)X_1 \\ (\sin\theta)Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)AX_1 + s(\sin\theta)X_1\underbrace{Y_1^{\mathsf{T}}Y_1}_{=1} \\ (\cos\theta)sY_1\underbrace{X_1^{\mathsf{T}}X_1}_{=1} + (\sin\theta)BY_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\theta)\alpha_1X_1 + s(\sin\theta)X_1 \\ (\cos\theta)sY_1 + (\sin\theta)\beta_1Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)(\alpha_1 + s\tan\theta)X_1 \\ (\sin\theta)\left(\beta_1 + \frac{s}{\tan\theta}\right)Y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 + s\tan\theta)\begin{pmatrix} (\cos\theta)X_1 \\ (\sin\theta)Y_1 \end{pmatrix} = (\alpha_1 + s\tan\theta)V(\theta).$$

D'autre part, $V(\theta) \neq 0$, car $V(\theta)$ est unitaire, cf. III.2 a).

On conclut que $V(\theta_1)$ est un vecteur propre de M_s et que la valeur propre correspondante est $\mu_1 = \alpha_1 + s\tan\theta_1 = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta_1}$ et que $V(\theta_2)$ est un vecteur propre de M_s et que la valeur propre correspondante est $\mu_2 = \alpha_1 + s\tan\theta_2 = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta_2}$.

III.2 c) v) Notons $\mathcal{F} = \big(V(\theta_1),\, V(\theta_2),\, Z_2, Z_3, ..., Z_n,\, T_2, T_3, ..., T_p\big)$.

1) •
$$\big(V(\theta_1)\,\big|\,V(\theta_2)\big)_{n+p} = (\cos\theta_1)(\cos\theta_2)(X_1\,|\,X_1)_n + (\sin\theta_1)(\sin\theta_2)(Y_1\,|\,Y_1)_p$$
$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

• Pour tout $i \in \{2, ..., n\}$: $\big(V(\theta_1)\,\big|\,Z_i\big)_{n+p} = (\cos\theta_1)(X_1\,|\,X_j)_n + (\sin\theta_1)(X_1\,|\,0)_p = 0$,
et, de même : $\big(V(\theta_2)\,\big|\,Z_i\big)_{n+p} = 0$.

• Pour tout $j \in \{2, ..., p\}$: $\big(V(\theta_1)\,\big|\,T_j\big)_{n+p} = (\cos\theta_1)(X_1\,|\,0)_n + (\sin\theta_1)(Y_1\,|\,Y_j)_p = 0$
et, de même : $\big(V(\theta_2)\,\big|\,T_j\big)_{n+p} = 0$.

• D'après II.2 b), les Z_i sont deux à deux orthogonaux entre eux, et les T_j sont deux à deux orthogonaux entre eux.

On conclut que $\mathcal{F}$ est orthogonale.

2) • On a vu que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont unitaires, cf. III.2 a).

• D'après II.2 a), pour tout $i \in \{2, ..., n\}$, $||Z_i||^2_{n+p} = ||X_i||^2_n = 1$ et, pour tout $j \in \{2, ..., p\}$, $||T_j||^2_{n+p} = ||Y_j||^2_p = 1$.
Ceci montre que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont unitaires.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale, donc orthogonale à vecteurs tous non nuls, donc est libre. De plus, $\mathcal{F}$ a $n+p$ éléments et $\dim(\mathbb{R}^{n+p}) = n+p$.
On conclut que $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^{n+p}$.

Il s'ensuit que les valeurs propres de M_s sont, avec multiplicité, dans l'ordre correspondant à $\mathcal{F}$:

$$\alpha_1 + s\tan\theta_1,\ \beta_1 + s\tan\theta_2,\ \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \beta_2, ..., \beta_p.$$

III.2 c) vi) On a vu en III.2 a) que les valeurs propres de M_0 sont, avec multiplicité :

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p,$$

ou encore :

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \beta_2, ..., \beta_p.$$

Les formules exprimant μ_1 et μ_2 en fonction de α_1, β_1, s donnent donc encore des valeurs propres de M_s lorsque $s = 0$, et même, plus précisément, la liste obtenue à la question v) est encore valable lorsque $\alpha = 0$.

PARTIE IV

IV.1 Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \geq 0$. La matrice carrée d'ordre 1, $A = (\lambda_1)$ est élément de $\mathbf{S}_1(\mathbb{R}_+)$ et λ_1 est valeur propre de A (avec multiplicité).
Ainsi, (P_1) est trivialement vraie.

IV.2 a) On a :
$$a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -(\underbrace{\lambda_2}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{\lambda_n}_{\leq 0}) \geq 0$$
et :
$$a + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = (\lambda_1 + \lambda_{n+1}) + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0.$$
Ainsi, la liste $(a,\ \lambda_2, ..., \lambda_n)$ vérifie : $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ et $a + \lambda_2 + \cdots \lambda_n \geq 0$.
D'après (P_n), il existe $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $a,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$ soient les valeurs propres de A, avec multiplicité.

IV.2 b) Puisque $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}_+)$, d'après II.5 b), A admet un vecteur propre unitaire positif associé à la valeur propre a.

IV.2 c) i) On prend $p = 1$, $B = 0$, qui est bien une matrice carrée réelle symétrique, et $Y_1 = (1)$, qui est bien un vecteur propre unitaire de B. Alors : $M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ sX_1^\intercal & 0 \end{pmatrix}$, donc la matrice M_s proposée est bien de la forme (1) introduite au début de la partie III.

IV.2 c) ii) • Avec les notations de III.2, on a : $\alpha_1 = a,\ \alpha_2 = \lambda_2, ..., \alpha_n = \lambda_n,\ \beta_1 = 0$
et il n'y a pas de β_j pour $j \geq 2$.
D'où :
$$\tan\theta_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2s}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2s}$$
$$\mu_1 = \alpha_1 + s\tan\theta_1 = a + \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}.$$
La liste des valeurs propres de M_s, avec multiplicité, est donc :

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2},\ \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2},\ \lambda_2, ..., \lambda_n.$$

IV.2 c) iii) Prenons $s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_{n+1}}$, ce qui est possible car $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_{n+1}$, donc $-\lambda_1\lambda_{n+1} \geq 0$. On a alors :
$$a^2 + 4s^2 = (\lambda_1 + \lambda_{n+1})^2 + 4(-\lambda_1\lambda_{n+1}) = \lambda_1^2 + \lambda_{n+1}^2 - 2\lambda_1\lambda_{n+1} = (\lambda_1 - \lambda_{n+1})^2,$$
d'où, puisque $\lambda_1 \geq \lambda_{n+1}$: $\sqrt{a^2 + 4s^2} = \lambda_1 - \lambda_{n+1}$
puis :
$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1} + \lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \lambda_1, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda_1 + \lambda_{n+1}) = \lambda_{n+1}.$$

On conclut que, pour ce choix de s, les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$.

Ceci montre qu'il existe A (égale à M_s) dans $\mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que la liste des valeurs propres de A, avec multiplicité, soit : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$, et établit (P_{n+1}).

On conclut, par récurrence sur n, que (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.3 a) On remarque d'abord que la matrice A proposée est carrée réelle d'ordre 3, positive et symétrique.
Formons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \longleftarrow C_1+(C_2+C_3)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-6 & -2 & -3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 & -3 \\ \lambda-6 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda-1 & -3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda+1)(\lambda+3)$$

On conclut : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-3,\ -1,\ 6\}$.

IV.3 b) D'abord, on a : $\lambda_1 \geq 0 \leq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \geq 0$.
Avec les notations de IV.2 :

$$n = 3,\ a = \lambda_1 + \lambda_4 = 6,\ s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_4} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Calculons X_1, un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre 6.
On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = 6X \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 6x \\ 2x + y + 3z = 6y \\ 3x + 3y = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

cette solution étant évidente.

Un vecteur propre unitaire pour la valeur propre 6 de A est donc $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice M_s construite en IV.2 c) convient et on a :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ sX_1^{\mathsf{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

* *