Mines-Ponts Mathématiques 2 PC 2023

Pandou

3 mai 2023

1 Préliminaires

1. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ et $U \in M_{N,1}(\mathbb{R})$, on a pour $i \in [\![1, N]\!]$,

$$(AU)[i] = \sum_{j=1}^{N} A[i,j]U[j] = \sum_{j=1}^{N} A[i,j]$$

Ainsi, A vérifie (M_2) si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, N]\!], (AU)[i] = U[i]$, ie $AU = U$.

Si A et B sont deux noyaux de Markov, alors $AU = BU = U$ et donc $(AB)U = A(BU) = AU = U$, donc AB vérifie (M_2). Enfin, on a

$$(AB)[i,j] = \sum_{k=1}^{N} A[i,k]B[k,j] \geqslant 0$$

Et donc, AB vérifie aussi (M_1). Ainsi, AB est un noyau de Markov.

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que K^n est un noyau de Markov. Si $n = 0$, I_n est un noyau de Markov, si $n = 1$, K est un noyau de Markov par hypothèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que K^n est un noyau de Markov. Alors, par produit, $K^{n+1} = K^n K$ est un noyau de Markov.
Ainsi, on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, K^n$ est un noyau de Markov.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$. Comme K^n est un noyau de Markov, on a $0 \leqslant K^n[i,j] \leqslant 1$ et $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ converge (vers $e^{|t|}$) et donc par comparaison, $\sum_n \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$ converge absolument, donc converge.

4. Soit $t \geqslant 0$. Comme K^n est un noyau de Markov, on a $K^n[i,j] \geqslant 0$ et donc par somme

$$H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!} \geqslant 0$$

Ainsi, H_t vérifie (M_1).

Fixons maintenant $i \in [\![1, N]\!]$. On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} H_t[i,j] &= \sum_{j=1}^{N} \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!} \right) \\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} K^n[i,j]}_{=1} \\ &= e^{-t} e^t = 1 \end{aligned}$$

Et donc, H_t vérifie (M_2) et donc est un noyau de Markov.

5. Soit $t, s \geqslant 0$ et $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ et donc, par un produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}
(H_tH_s)[i,j] &= \sum_{k=1}^{N} H_t[i,k]H_s[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{N} e^{-(s+t)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,k]}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n K^n[k,j]}{n!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} e^{-(s+t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{t^m K^m[i,k]}{m!} \frac{s^{n-m}K^{n-m}[k,j]}{(n-m)!}\right) \\
&= e^{-(s+t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{t^m s^{n-m}}{m!(n-m)!} \sum_{k=1}^{N} K^m[i,k]K^{n-m}[k,n]\right) \\
&= e^{-(s+t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{t^m s^{n-m}}{m!(n-m)!} (K^m K^{n-m})[i,j]\right) \\
&= e^{-(s+t)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n K^n[i,j]}{n!} \\
&= H_{s+t}[i,j]
\end{aligned}$$

grâce au binôme de Newton. Ainsi, on a montré que $H_{t+s} = H_tH_s$.

2 Modélisation probabiliste

6. Comme $p_{i,j}$ est une probabilité, on est $K[i,j] \geqslant 0$ et donc K vérifie (M_1).
On fixe $i \in [\![1,N]\!]$, on suppose que $\mathbb{P}(Z_k = i) \neq 0$, alors $\mathbb{P}\big(\cdot\,|Z_k = i\big)$ est une loi de probabilité et donc :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}\big(Z_{k+1} = j|Z_k = i\big) = 1$$

Ainsi, K vérifie (M_2) et donc K est un noyau de Markov.

7. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : “pour tout $j \in [\![1,N]\!], \mathbb{P}(Z_n = j) = K^n[1,j]$”.
Si $n = 0$, on a $\mathbb{P}(Z_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = K^0[1,j]$ car K^0 est la matrice identité.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la résultat vrai au rang n. Alors, $(Z_n = i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ forme un système complet d'événements et donc par la formule des probabilités totales, pour $j \in [\![1,N]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = j) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\big((Z_{n+1} = j) \cap (Z_n = i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} p_{i,j}\mathbb{P}(Z_n = i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} K^n[1,i]K[i,j] \\
&= K^{n+1}[1,j]
\end{aligned}$$

Et donc, on a montré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{P}(Z_n = j) = K^n[1,j]$.

8. On suppose que Z_n et Y_t sont indépendantes, et alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{t,j}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Z_n = j)\mathbb{P}(Y_t = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} K^n[1,j]e^{-t}\frac{t^n}{n!} \\
&= H_t[1,j]
\end{aligned}$$

3 Étude d'un endomorphisme auto-adjoint

9. Il existe une base orthonormée (pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$) de vecteurs propres de u.
Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé à λ, alors

$$q_u(x) = \lambda \|x\|^2 \geqslant 0$$

et donc, $\lambda \geqslant 0$ car $\|x\|^2 > 0$. Les valeurs propres de u sont positives.

10. On note $y = x - p(x)$ que l'on écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Et :

$$\begin{array}{rcl} q_u\big(x - p(x)\big) & = & \big(u(y)|y\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\ & \geqslant & \lambda_2 \displaystyle\sum_{i=2}^{n} y_i^2 \\ \text{x-p(x) est dans l'orthogonal de Ker(u),} & & \\ \text{qui est engendré par e2,...,en donc y1=0} & = & \lambda_2 \|y\|^2 = \lambda_2 \|x - p(x)\|^2 \end{array}$$

4 Convergence de $H_t[i,j]$

11. Soit $j \in [\![1, N]\!]$, on a

$$(\pi K)[j] = \sum_{i=1}^{N} \pi[i] K[i,j] = \sum_{i=1}^{N} K[j,i] \pi[j] = \pi[j]$$

car $\sum_{i=1}^{N} K[j,i] = 1$ car K est un noyau de Markov. Ainsi, on a montré que

$$\pi K = \pi$$

12. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire et symétrique. On a

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]^2 \pi[i] \geqslant 0$$

C'est une somme de termes positifs et donc elle est nulle si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, N]\!], X[i]^2 \pi[i] = 0$ et donc comme $\pi[i] \neq 0$ pour tout i, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, N]\!], X[i] = 0$ et donc $X = 0$.
Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_{N,1}(\mathbb{R})$.

13. On a $X \in \text{Ker}(u) \iff KX = X$ et donc les éléments de $\text{Ker}(u)$ sont exactement les vecteurs propres de K associé à la valeur propre 1. Comme 1 est valeur propre simple de K et que U est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on en déduit que les éléments de $\text{Ker}(u)$ sont proportionnels à U :

$$\text{Ker}(u) = \text{Vect}(U)$$

Soit $X, Y \in M_{N,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle u(X), Y \rangle & = & \langle X - KX, Y \rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \big(X[i] - (KX)[i]\big) Y[i] \pi[i] \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X[i] Y[i] \pi[i] - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K[i,j] X[j] Y[i] \pi[i] \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X[i] Y[i] \pi[i] - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X[j] Y[i] K[j,i] \pi[j] \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle X, u(Y)\rangle &= \langle X, Y - KY\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]\big(Y[i] - (KY)[i]\big)\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i] - \sum_{i=1}^{N} X[i]\pi[i]\sum_{j=1}^{n} K[i,j]Y[j] \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i] - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X[i]Y[j]K[i,j]\pi[i]
\end{aligned}$$

Et on reconnaît la première somme en inversant les indices i et j et alors, on a

$$\langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle$$

Et donc, u est auto-adjointe.

14. Soit $X \in E$, on a

$$\begin{aligned}
q_u(X) &= \langle u(X), X\rangle \\
&= \|X\|^2 - \langle KX, X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]^2\pi[i] - \sum_{i=1}^{N}(KX)[i]X[i]\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N} X[i]^2\pi[i] - \sum_{i,j=1}^{N} K[i,j]X[j]X[i]\pi[i] \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} \big(X[i]^2 - X[i]X[j]\big)K[i,j]\pi[i] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} \big(X[i] - X[j]\big)^2 K[i,j]\pi[i]
\end{aligned}$$

On en déduit que $q_u(X) \geqslant 0$ et donc, d'après la question 9., les valeurs propres de u sont positives.

15. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\big[\psi_X(t)\big]_i = \sum_{j=1}^{N} H_t[i,j]X[j] = e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n K^n[i,j]}{n!}X[j] = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n (K^n X)[i]}{n!}$$

Et donc, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_X(t) = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}K^n X = e^{t(K-I_n)}X$$

On en déduit alors par propriété de l'exponentielle de matrices que ψ_X est dérivable et :

$$\psi_X'(t) = (K - I_n)\psi_X(t) = -(I_n - K)H_t X$$

16. φ_X est dérivable comme composée de fonctions différentiables et on a

$$\varphi_X'(t) = 2\langle \psi_X(t), \psi_X'(t)\rangle = -2\langle H_t X, (I_n - K)H_t X\rangle = -2q_u(H_t X)$$

17. On a $\|U\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} U[i]^2\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}\pi[i] = 1$ et donc U est un vecteur unitaire qui dirige $\mathrm{Ker}(u)$. Alors, on a

$$p(X) = \langle X, U\rangle U \qquad \text{et} \qquad p(H_t X) = \langle H_t X, U\rangle U$$

On montre que $\langle X, U\rangle = \langle H_t X, U\rangle$. On a

$$\begin{aligned}
\langle H_t X, U\rangle &= \sum_{i=1}^{N} (H_t X)[i]\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H_t[i,j]X[j]\pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} H_t[j,i]\pi[j]X[j] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \pi[j]X[j] \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} H_t[j,i]\right)}_{=1}
\end{aligned}$$

car H_t est un noyau de Markov. Et donc, on a

$$\langle H_t X, U\rangle = \sum_{j=1}^{N} \pi[j]X[j]U[j] = \langle X, U\rangle$$

ce qui est ce qu'on voulait montrer.

18. On a, d'après la question 10.,

$$\varphi_Y'(t) = -2q_u(H_t Y) \leqslant -2\lambda\|H_t Y\|^2 = -2\lambda\varphi_Y(t)$$

On en déduit que la fonction $t \longmapsto e^{2\lambda t}\varphi_Y(t)$ a une dérivée négative, donc est décroissante et donc, on a

$$\forall t \geqslant 0, \varphi_Y(t) \leqslant e^{-2\lambda t}\varphi_Y(0)$$

ce qui se traduit par :

$$\left\|H_t Y\right\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|Y\|$$

et comme $Y = X - P(X)$ et en utilisant la question 17., on a :

$$\|H_t X - p(H_t X)\|^2 = \|H_t X - p(X)\| \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - P(X)\|^2$$

19. On applique le résultat précédent à $X = E_i$, alors $p(E_i) = \langle E_i, U\rangle U = \pi[i]U$ et comme p est un projecteur orthogonal, on a

$$\|E_i\|^2 = \|E_i - p(E_i)\|^2 + \|p(E_i)\|^2$$

et donc,

$$\|E_i - p(E_i)\|^2 = \|E_i\|^2 - \|p(E_i)\|^2 = \pi[i] - \pi[i]^2$$

Et donc, on a :

$$\|H_t E_i - \pi[i]U\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\big(\pi[i] - \pi[i]^2\big) \leqslant e^{-2\lambda t}\pi[i]$$

et en prenant la racine carrée, on a

$$\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$$

20. On calcule en utilisant la question 5. :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\big(H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]\big)\big(H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\big) &= \sum_{k=1}^{N}\Big(H_{\frac{t}{2}}[i,k]H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \pi[k]H_{\frac{t}{2}}[k,j] + \pi[k]\pi[j]\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k]H_{\frac{t}{2}}[k,j] - \pi[j]\sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k] - \sum_{k=1}^{N}\pi[k]H_{\frac{t}{2}}[k,j] + \pi[j]\sum_{k=1}^{N} \\
&= H_t[i,j] - \pi[j] - \sum_{k=1}^{N}\pi[j]H_{\frac{t}{2}}[j,k] + \pi_j \\
&= H_t[i,j] - \pi[j]
\end{aligned}$$

21. On va utiliser la question 19., on a $(H_tE_i)[j] = H_t[j,i]$ et on a :

$$\|H_tE_i - \pi[i]U\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \big((H_tE_i)[j] - \pi[i]U[j]\big)^2 \pi[j] = \sum_{j=1}^{N} \big(H_t[j,i] - \pi[i]\big)^2 \pi[j]$$

On en déduit alors que

$$\sqrt{\pi[j]}\big|H_t[j,i] - \pi[i]\big| \leqslant \|H_tE_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$$

Et donc, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$:

$$\big|H_t[j,i] - \pi[i]\big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[i]}{\pi[j]}}$$

ce qui est l'inégalité qu'on voulait obtenir (en intervertissant i et j).

On en déduit alors que

$$\lim_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]$$