Corrigé du DS 8 sujet 1

Exercice 1

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Q1. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$x^2y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0 \Leftrightarrow y''(x) + \frac{a(x)}{x^2}y'(x) + \frac{b(x)}{x^2} = 0,$$

or $x \mapsto \frac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur $]0\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de Cauchy,

$$\boxed{S^+ \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$$

Et de même :

$$\boxed{S^- \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$$

Q2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J.

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Donc f_I et f_J sont nulles, donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$. De plus $f \in S$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Donc f est nulle.

On a montré que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$, or $0 \in \operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de S, donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}.}$$

Ainsi φ est une application linéaire injective de S dans $S^+ \times S^-$, donc $\dim S \leqslant \dim(S^+ \times S^-) = \dim S^+ + \dim S^-$. D'où :

$$\boxed{\dim S \leqslant 4.}$$

Q3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E): \quad x^2y'' + xy' = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0\,;+\infty[)$,

$$\begin{aligned} &\forall x \in]0\,;+\infty[, x^2f''(x) + xf'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in]0\,;+\infty[, (f')'(x) + \frac{1}{x}f'(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]0\,;+\infty[\\ \Leftrightarrow\ &f' \text{ est solution de } y' + \frac{1}{x}y = 0 \text{ sur }]0\,;+\infty[\\ \Leftrightarrow\ &\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid f' : x \mapsto \frac{\lambda}{x} \\ \Leftrightarrow\ &\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid f : x \mapsto \lambda \ln x + \mu \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{S^+ = \operatorname{Vect}(\ln, 1) \text{ et de même } S^- = \operatorname{Vect}(x \mapsto \ln(-x), 1).}$$

Soit $f \in S$, donc $f_I \in S^+$ et $f_J \in S^-$ donc il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 + k_2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ k_3 + k_4 \ln|x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et par continuité de f en 0, on en déduit que $k_2 = k_4 = 0$ et $k_1 = k_3$, puis $f(0) = k_1$ par continuité. Donc $S \subset \operatorname{Vect}(1)$ et réciproquement toute fonction constante est solution de E sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{S = \operatorname{Vect}(1) \text{ et } \dim S = 1.}$$

Q4. Dans cette question $(E) : x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^\alpha \in \mathcal{C}^2(]0\,;+\infty[)$. Donc pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} x^2f''(x) - 6xf'(x) + 12f(x) &= (\alpha(\alpha-1) - 6\alpha + 12)x^2 \\ &= (\alpha^2 - 7\alpha + 12)x^2 \\ &= (\alpha-3)(\alpha-4)x^2 \end{aligned}$$

Donc : $f_3 : x \mapsto x^3$ et $f_4 : x \mapsto x^4$ sont des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$. Donc $\operatorname{Vect}(f_3, f_4) \subset S^+$, de plus le wronskien de (f_3, f_4) en 1 est $\det((1,3),(1,4)) \neq 0$ donc (f_3, f_4) est une base de S^+. Donc :

$$\boxed{S^+ = \operatorname{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4).}$$

On remarque que f_3 et f_4 sont également solutions de (E) sur $]-\infty\,;0[$ et $W_{(f_3,f_4)}(-1) \neq 0$, donc

$$\boxed{S^- = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4).}$$

Soit $f \in S$, donc f_I et f_J sont solutions de (E) sur I et J respectivement, donc il existe k_1, k_2, k_3, k_4 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \begin{cases} k_1x^3 + k_2x^4 & \text{si } x > 0 \\ k_3x^3 + k_4x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Et par continuité de f en 0, $f(0) = 0$. Donc : $S \subset \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$ avec $g_1 = \mathbb{1}_{[0\,;+\infty[}f_3, g_2 = \mathbb{1}_{[0\,;+\infty[}f_4, g_3 = \mathbb{1}_{]-\infty\,;0]}f_3, g_4 = \mathbb{1}_{]-\infty\,;0]}f_4$.

Réciproquement, la fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires et $\lim_{x\to0^-} g_1(x) = \lim_{x\to0^+} g_1(x) = g_1(0)$ donc g_1 est continue en 0 et $\forall x \in]0\,;+\infty[, g_1'(x) = 3x^2 \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, $\forall x \in]-\infty\,;0[, g_1'(x) = 0 \xrightarrow[x\to0^-]{} 0$, $\forall x \in]0\,;+\infty[, g_1''(x) = 6x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, $\forall x \in]-\infty\,;0[, g_1'(x) = 0 \xrightarrow[x\to0^-]{} 0$. Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, g_1 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. De plus g_1 est solution de (E) sur I et sur J et en 0 :

$$0^2g_1''(0) - 6g_1'(0) + 12g_1(0) = 0.$$

Donc g_1 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De même g_2, g_3, g_4 sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc :

$$\boxed{S = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3, g_4).}$$

Montrons que (g_1, g_2, g_3, g_4) est libre. Soit $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$k_1g_1 + k_2g_2 + k_3g_3 + k_4g_4 = 0$$

par évaluation en 1 et 2 : $k_1 + k_2 = 0$ et $2^3k_1 + 2^4k_2 = 0$ donc $k_1 = k_2 = 0$ et de même par évaluation en (-1) et (-2) : $k_3 = k_4 = 0$. Donc (g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de S.

Donc :

$$\boxed{\dim S = 4.}$$

Q5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

Brouillon :

On cherche une équation dont les solutions sur I et J seront $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. En reprenant l'idée de la question précédente, on cherche une équation de la forme

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

On aura alors pour $f : x \mapsto x^\alpha$, $\forall x \in]0\,;+\infty[$:

$$x^2f''(x) + axf'(x) + bf(x) = (\alpha^2 + (a-1)\alpha + b)x^\alpha$$

on veut la parenthèse nulle pour $\alpha = -1$ et pour $\alpha = -2$ or $(X+1)(X+2) = X^2+3x+2$ on choisit donc $b = 2$ et $a = 4$.

fin du brouillon.

On considère l'équation :

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Soit $f \in S$, alors f est solution de (E) sur I et sur J. Or, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont des solutions de (E) sur I et forment une famille libre, donc une base de S^+ et de même pour S^-. Donc il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{k_3}{x} + \frac{k_4}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Supposons par l'absurde $k_2 \neq 0$, donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{k_2}{x^2} \xrightarrow[x\to0^+]{} \pm\infty$ or f est continue en 0, d'où la contradiction. Donc $k_2 = 0$.

Supposons par l'absurde $k_1 \neq 0$, donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{k_1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} \pm\infty$ or f est continue en 0, d'où la contradiction. Donc $k_1 = 0$.

De même $k_3 = k_4 = 0$, donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et donc f est nulle par continuité.

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } (E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 0,\ \dim S = 0.}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Q6. Soit f une solution de (E) développable en série entière sur $]-r\,;r[$ tel que pour tout $x \in\,]-r\,;r[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$. Donc pour tout $x \in\,]-r\,;r[$:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2f''(x) + (x^2 - x)f'(x) + 2f(x)\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(na_nx^{n+1} - na_nx^n) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1) - n + 2)a_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n\\
&= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1})x^n.
\end{aligned}$$

Donc, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} a_0 = 0\\ \forall n \geqslant 1, (n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Donc : $(\forall n \geqslant 1, (n^2 - 2n + 2) = (n-1)^2 + 1 > 0)$

$$\begin{cases} a_0 = 0\\ \forall n \geqslant 1, a_n = \frac{n-1}{n^2-2n+2}a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$. Donc f est nulle sur $[-r\,;r]$.

On a montré que si f est une solution de (E) développable en série entière sur $]-r\,;r[$, alors f est nulle.

Donc :

Il n'existe pas de solution non nulle de l'équation (E) développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[\quad (r > 0)$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On définit deux fonctions :

- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin\left(x^2 - y^2\right)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

Q7. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2 - y^2) & -2y\cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

Les fonctions coordonnées de g sont linéaires donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Jg(x, y) : \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q8. a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f \circ g(x, y) &= \sin((x + y)^2 - (x - y)^2)\\
&= \sin(4xy)
\end{aligned}$$

donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) = 4y\cos(4xy) \text{ et } \frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x, y) = 4x\cos(4xy)$$

Donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{d}(f \circ g)(x, y) \cdot (u, v) = 4y\cos(4xy)u + 4x\cos(4xy)v.$$

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
J(f \circ g)(x, y) &= Jf(g(x, y)) \times Jg(x, y)\\
&= \begin{pmatrix} 2(x + y)\cos(4xy) & 2(x - y)\cos(4xy) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 4x\cos(4xy) & 4y\cos(4xy) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f \circ g)(x, y) \cdot (u, v) &= J(f \circ g)(x, y) \times \begin{pmatrix} u\\ v \end{pmatrix}\\
&= 4y\cos(4xy)u + 4x\cos(4xy)v.
\end{aligned}$$