# Devoir Surveillé n° 8 sujet 1.
# le 29 mars.

## Exercice 1

$a$ et $b$ étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

On note $S^+$ l'espace vectoriel des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $I = ]\,0, +\infty\,[$ et $S^-$ l'espace vectoriel des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $J = ]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel $S$ des fonctions $y$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(E)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Q1.** Donner la dimension des espaces vectoriels $S^+$ et $S^-$.

**Q2.** On note $\varphi$ l'application linéaire de $S$ vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où $f_I$ désigne la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $I$ et $f_J$ désigne la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $J$.

Donner le noyau de l'application $\varphi$ et en déduire que $\dim S \leqslant 4$.

**Q3.** Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E): \quad x^2y'' + xy' = 0.$$

Déterminer $S^+$ et $S^-$.

Déterminer ensuite $S$ et donner sans détails la dimension de $S$.

**Q4.** Dans cette question $(E) : x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur $I$ de cette équation de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ ($\alpha$ réel).

En déduire $S^+$ puis $S^-$.

Déterminer $S$ et donner la dimension de $S$.

**Q5.** Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

## Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

**Q6.** Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation $(E)$ développables en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[\quad (r > 0)$ de $\mathbb{R}$ ?

# Exercice 3

On définit deux fonctions :

- la fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

**Q7.** Justifier que les fonctions $f$ et $g$ sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de $f$ puis de $g$ en $(x,y)$.

**Q8.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

**a)** en calculant $f \circ g$ ;

**b)** en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

# Problème

## Partie préliminaire

**Q1.** **a)** Soit $x \in ]0,+\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

**b)** On note, pour tout $x \in ]0,+\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler). Démontrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.

**c)** Démontrer que la fonction $\Gamma$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

**Q2.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

**a)** Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

**b)** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n>1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ sera notée $\gamma$ dans tout le sujet ( $\gamma$ est appelée la constante d'Euler).
Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in ]0\,;+\infty[, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

## Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

**Q3.** Pour $x \in ]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction $f_n$ sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in ]0,n],\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in ]n,+\infty[,\ f_n(t) = 0.$$

**a)** Démontrer que pour tout $x < 1, \ln(1-x) \leqslant -x$.
En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in ]0,+\infty[$ et tout $t \in ]0,+\infty[$,

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.$$

**b)** En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[, \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

**Q4.** On pose, pour $n$ entier naturel et pour $x \in ]0,+\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$.

**a)** Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

**b)** En déduire, pour $n$ entier naturel et pour $x \in ]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

**c)** Démontrer que, pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)} \quad \text{(formule de Gauss).}$$

**Q5.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geqslant 1$ et $x \in ]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right],$$

démontrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right] \quad \text{(formule de Weierstrass).}$$

**Q6. a)** En déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

**b)** On pose, pour tout $x \in ]0,+\infty\Big[, g(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$. Démontrer que l'application $g$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

**c)** En déduire que, pour tout $x \in ]0,+\infty\Big[, \psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que pour tout $x \in ]0,+\infty\Big[, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

**Q7. a)** Que vaut $\psi(1)$ ? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t$.

**b)** Calculer, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2, \psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

**c)** On pose, pour tout $(x,y) \in ]0,+\infty[^2$ et $k$ entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$.
Démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
En déduire $\lim_{n \to +\infty}(\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

**Q8.** Déterminer l'ensemble des applications $f$ définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in ]0,+\infty[, f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
- pour tout $x \in ]0,+\infty[, \lim_{n \to +\infty}(f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

## Autour de la fonction Digamma

**Q9.** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant : si on a tiré la boule numéro $k$, on la remet alors dans l'urne avec $k$ nouvelles boules toutes numérotées $k$.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3 ).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note $X$ (respectivement $Y$ ) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

**a)** Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$ ainsi que son espérance $E(X)$.

**b)** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y$ et vérifier que pour tout entier naturel non nul $k, P(Y=k)=\frac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)$.

**c)** Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)}=\frac{1-n}{2}+n(\psi(2n+1)-\psi(n+1))$$