6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 7

Un milieu diélectrique absorbant est décrit par un indice complexe $\underline{n} = n' - in''$ où n' et n'' sont réels.

La relation de dispersion est : $k = \dfrac{\omega}{c}\underline{n} = k' - ik''$.

On considère dans ce diélectrique une onde de champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kx)\vec{u}_z$

a-Ecrire ce champ en fonction de k' et k'' et commenter.

b-Exprimer le vecteur de Poynting $<\vec{R}>$ moyen à l'abscisse x. Commenter.

c-En déduire, en raisonnant sur une tranche d'épaisseur dx, la puissance volumique moyenne dissipée dans le diélectrique à l'abscisse x.

d-Proposer une interprétation de la loi de Beer-Lambert utilisée en spectrométrie en chimie.

Sachant que pour $\lambda = 0{,}5\ \mu m$, l'intensité à la profondeur 12 m est le dixième de l'intensité près de la surface de l'eau, calculer l'indice d'extinction de l'eau.

---

a- $\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}\vec{u}_z}$ propagation et atténuation dans le sens des z croissants

b- $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ => $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = -\dfrac{E_0}{\omega}(k' - ik'')e^{-k''x}e^{i(\omega t - k'x)}\vec{u}_y$

En notation réelle : $\vec{E} = E_0 e^{-k''x}\cos(\omega t - k'x)\vec{u}_z$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{\omega}e^{-k''x}[k'\cos(\omega t - k'x) + k''\sin(\omega t - k'x)]\vec{u}_y$$

D'où : $\vec{R} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\omega\mu_0}e^{-2k''x}[k'\cos^2(\omega t - k'x) + k'k''\sin(\omega t - k'x)\cos(\omega t - k'x)]\vec{u}_x$

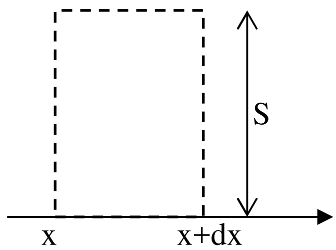
Puis : $<\vec{R}> = \dfrac{E_0^2}{2\omega\mu_0}e^{-2k''x}k'\vec{u}_x = \dfrac{n'E_0^2}{2c\mu_0}e^{-2k''x}\vec{u}_x$ Soit aussi : $\boxed{<\vec{R}> = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c n' E_0^2 e^{-2k''x}\vec{u}_x}$

c-puissance moyenne dissipée dans la tranche =
puissance moyenne entrant en x – puissance moyenne sortant en x+dx =

$<R(x)>S - <R(x+dx)>S = -\dfrac{d<R>}{dx}Sdx$

D'où : $p_{\text{vol dissipée}} = -\dfrac{d<R>}{dx} = \varepsilon_0 c n' k'' E_0^2 e^{-2k''x}$

Or : $k'' = \dfrac{\omega}{c}n''$ Donc : $\boxed{p_{\text{vol dissipée}} = \varepsilon_0 \omega n' n'' E_0^2 e^{-2k''x}}$



d-L'intensité I(x) est égale à <R(x)>, donc : $I(x) = I(0)e^{-2k''x}$

C'est la loi de Beer-Lambert avec un coefficient d'atténuation de $\alpha = 2k''$

A.N : $e^{-2\frac{\omega}{c}n''L} = \dfrac{1}{10}$ avec L = 12 m => $-2\dfrac{2\pi}{cT}n''L = -\text{Ln}10$

=> $n'' = \dfrac{\lambda}{4\pi L}\text{Ln}10$

=> $n'' = 7{,}6.10^{-9}$
