

6.8.1 Fonction d'onde-Exercice 4

a-Retrouver la relation de dispersion d'une particule libre quantique de masse m .

b-On considère que l'état de la particule quantique est représenté par un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk qui détermine l'extension spatiale initiale Δx_0 du paquet d'ondes à l'instant $t = 0$. La pulsation moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0 .

- Rappeler la définition de la vitesse de groupe v_{g0} et déterminer son expression.
 - Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur Δk correspond une dispersion de la vitesse de groupe Δv_g autour de la valeur moyenne v_{g0} . Exprimer Δv_g en fonction de \hbar , m et Δx_0 .
 - En déduire la largeur du paquet d'ondes $\Delta x(t)$ après un déplacement d'une durée t depuis l'origine. Déterminer l'instant t_0 pour lequel la largeur du paquet d'ondes a doublé.
 - Calculer t_0 pour :
 - un électron de masse $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg initialement confiné dans un atome $\Delta x_0 = 10^{-10}$ m.
 - une gouttelette d'eau de rayon égal à $10 \mu\text{m}$ et de masse $m = 4 \cdot 10^{-12}$ kg
-

6.8.1 Fonction d'onde-Exercice 4

a-Pour une particule libre se déplaçant dans le sens positif de Ox : $\Psi_{es}^+(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$

La partie spatiale $\varphi(x) = Ae^{ikx}$ est solution de : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = E\varphi(x)$ avec $E = \hbar\omega$

Donc : $-\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2 Ae^{ikx}) = \hbar\omega Ae^{ikx}$ d'où la relation de dispersion : $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$

b-• $v_{g0} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ ce qui donne ici : $v_{g0} = \frac{\hbar k_0}{m}$

On considère les extrémités du spectre en vecteur d'onde :

$v_{g\max} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} = \frac{\hbar}{m} \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)$ $v_{g\min} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}} = \frac{\hbar}{m} \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}\right)$

Donc : $\Delta v_g = v_{g\max} - v_{g\min} = \frac{\hbar \Delta k}{m}$

Inégalité de Heisenberg spatiale : $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ avec $p = \hbar k$ et $\Delta x = \Delta x_0$ car on se place pour l'instant à $t = 0$

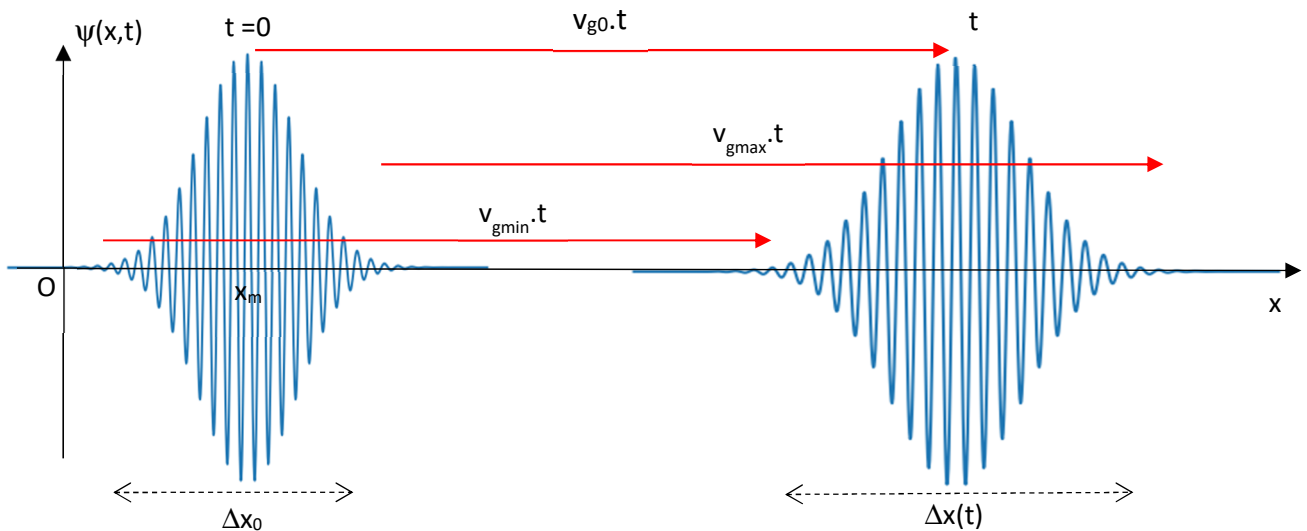
Donc : $\Delta x_0 \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x_0 \cdot \frac{m \Delta v_g}{\hbar} \geq \frac{1}{2}$ On se place à la limite de l'égalité : $\Delta v_g = \frac{\hbar}{2m \Delta x_0}$

• A $t = 0$, le paquet d'ondes se situe entre $x_m - \frac{\Delta x_0}{2}$ et $x_m + \frac{\Delta x_0}{2}$

Pendant la durée t : - l'avant du paquet d'onde se déplace de $v_{g\max} \cdot t$ donc se situe en $x_m + \frac{\Delta x_0}{2} + v_{g\max} t$

- l'arrière du paquet d'onde se déplace de $v_{g\min} \cdot t$ donc se situe en $x_m - \frac{\Delta x_0}{2} + v_{g\min} t$

Donc : $\Delta x(t) = x_m + \frac{\Delta x_0}{2} + v_{g\max} t - \left(x_m - \frac{\Delta x_0}{2} + v_{g\min} t\right) = \Delta x_0 + \Delta v_g t$ soit : $\Delta x(t) = \Delta x_0 + \frac{\hbar}{2m \Delta x_0} t$



$\Delta x(t_0) = \Delta x_0 + \frac{\hbar}{2m \Delta x_0} t_0 = 2\Delta x_0$ d'où : $t_0 = \frac{2m \Delta x_0^2}{\hbar}$

• électron : $t_0 = 2 \cdot 10^{-16}$ s Le paquet d'onde s'étale très vite, on ne peut pas traiter l'électron comme une particule localisée. C'est une particule quantique.

gouttelette : $t_0 = 8 \cdot 10^{12}$ s Le paquet d'onde ne s'étale pas à échelle humaine, la gouttelette est localisée. C'est un système classique.