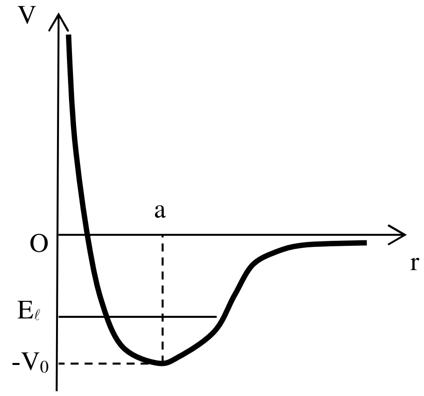
6.8.2 Puits-Exercice 8

Le deutéron est un isotope de l'atome d'hydrogène constitué d'un neutron de masse m_n et d'un proton de masse m_p. On traite ce problème à deux corps en considérant une particule fictive de masse réduite $m = m_n m_p/(m_n+m_p)$ soumise au potentiel de Yukawa qui modélise l'interaction nucléaire et dont l'allure est donnée ci-contre. On observe expérimentalement que le deutéron est le seul état lié stable du système proton-neutron et que son énergie de liaison vaut $E_\ell = -2{,}2$ Mev. L'ordre de grandeur de la portée de l'interaction est $a \approx 1$ fm qui est donc le rayon du noyau.



a-Commenter physiquement la forme de ce potentiel et proposer, en se plaçant à une dimension radiale r, une modélisation simplifiée utilisant un potentiel constant par morceaux dans trois régions distinctes que l'on précisera.

b-Donner la forme des fonctions d'onde de l'état stationnaire du système dans les trois régions. On posera : $q = \sqrt{-2mE}/\hbar$ et $k = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$

c-En écrivant les conditions aux limites en r = 0 et r = a, montrer que l'on obtient une équation de quantification de la forme f(ka) = -q/k et préciser la forme de la fonction f.

d-Compte tenu des expressions de k et q, montrer que l'équation de quantification prend la forme :
$\begin{cases} |g(ka)| = k/k_0 \\ h(ka) < 0 \end{cases}$ avec $k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$ et précise la forme des fonctions g et h

e-Résoudre graphiquement l'équation de quantification. Montrer que la condition $V_0 \gg |E_\ell|$ doit être vérifiée pour qu'il n'existe qu'un seul état lié. Déduire, dans le cadre de cette condition, une expression littérale approchée ainsi qu'un ordre de grandeur de V_0. Quelle est la signification physique de cette condition ? Pourquoi le deutéron est-il utilisé dans les accélérateurs du type synchrotron pour produire des neutrons de haute énergie ?

6.8.2 Puits-Exercice 8

---

a-La valeur a correspond à la distance à l'équilibre (V minimum) entre le proton et le neutron.

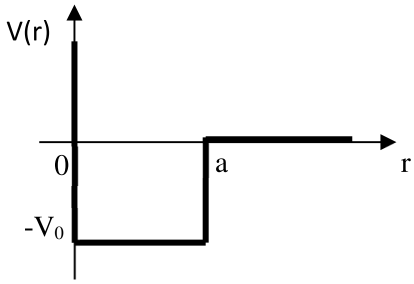
Le potentiel est répulsif ($\frac{dV}{dr} < 0$) pour r < a, attractif ($\frac{dV}{dr} > 0$) pour r > a

On peut prendre la schématisation ci-contre :

Région 1 : V(r) = +∞ pour r < 0

Région 2 : V(r) = $-V_0$ pour 0 < r < a

Région 3 : V(r) = 0 pour r > a



b-Equation de Schrödinger indépendante du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + V(r)\varphi(r) = E\varphi(r)$ avec $-V_0 < E < 0$

Région 1 : $\boxed{\varphi_1(r) = 0}$ car potentiel infini

Région 2 : $\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\varphi(r) = 0$ soit : $\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + k^2\varphi(r) = 0$ avec $k = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$

Solution : $\boxed{\varphi_2(r) = A_2\cos(kr) + B_2\sin(kr)}$

Région 2 : $\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(r) = 0$ avec E < 0 soit : $\frac{d^2\varphi}{dr^2}(r) - q^2\varphi(r) = 0$ avec $q = \sqrt{-2mE}/\hbar$

Solution : $\varphi_3(r) = A_3e^{qr} + B_3e^{-qr}$

La fonction d'onde doit être normalisable, donc ne doit pas tendre vers +∞ quand r tend vers +∞

Donc $A_3 = 0$ et : $\boxed{\varphi_3(r) = B_3e^{-qr}}$

c-Continuité de la fonction d'onde en r = 0 : $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ => $A_2 = 0$ (1)

Continuité de la fonction d'onde en r = a : $\varphi_2(a) = \varphi_3(a)$ => $B_2\sin(ka) = B_3e^{-qa}$ (2)

Continuité de la dérivée de la fonction d'onde en r = a : $\frac{d\varphi_2}{dr}(a) = \frac{d\varphi_3}{dr}(a)$ => $kB_2\cos(ka) = -qB_3e^{-qa}$ (3)

En divisant (3) par (2) : kcotan(ka) = -q donc : $\boxed{\cot an(ka) = -\frac{q}{k}}$

d- $\cot an^2(ka) = \frac{q^2}{k^2} = -\frac{E}{E+V_0}$ => $\frac{1}{\sin^2(ka)} - 1 = -\frac{E}{E+V_0}$ => $\frac{1}{\sin^2(ka)} = 1 - \frac{E}{E+V_0} = \frac{V_0}{E+V_0} = \frac{k_0^2}{k^2}$

Donc : $\boxed{|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0}}$ avec la condition cotan(ka) < 0 On en déduit : g = sin et h = cotan

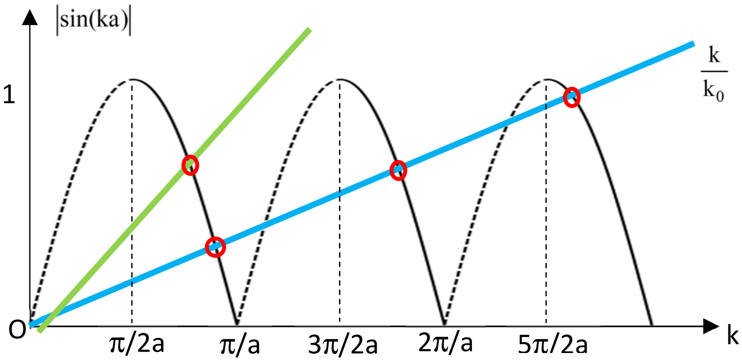
e-Les énergies des états liés sont données par les intersections des deux courbes. On a un seul état lié si la pente $1/k_0$ de la droite verte vérifie :

$$\frac{2a}{3\pi} < \frac{1}{k_0} < \frac{2a}{\pi}$$

D'où : $\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} < V_0 < \frac{9\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$

A.N : 100 MeV < V_0 < 900 MeV

($m \approx m_p/2 = 8{,}3.10^{-28}$ kg)



On a bien $V_0 \gg |E_\ell|$

On peut retenir : $\boxed{V_0 \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} \approx 100 \text{ MeV}}$

Cette condition signifie que l'énergie de liaison est faible devant la profondeur du puits, donc proche de la « sortie » du puits. L'état est peu lié. Le neutron peut facilement être séparé du proton d'où l'intérêt du deutéron pour produire des neutrons dans les accélérateurs.
