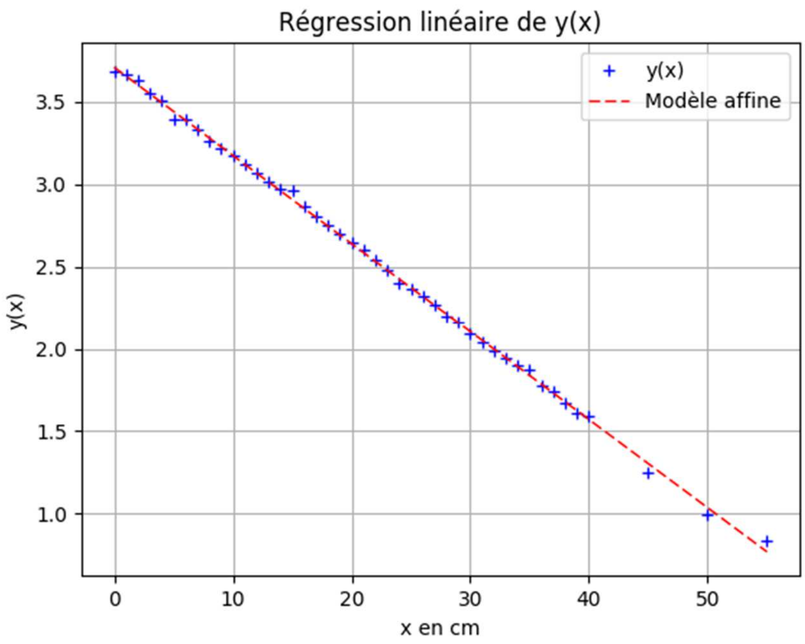
TP 17 — CONDUCTION THERMIQUE

Question 1 : Quelle fonction y(x) faut-il tracer pour vérifier que $T(x) - T_{air}$ varie exponentiellement avec x ?

Si $T(x) - T_{air} = A\exp(\alpha x)$, on trace $y(x) = \ln(T(x) - T_{air})$ pour obtenir une droite de pente α.



Pente négative $\alpha = -0{,}05343\ m^{-1}$ => distance caractéristique de décroissance $\delta = -\frac{1}{a} \approx$ 19 cm

Question 2 : Par un bilan d'énergie interne pour l'élément de tige compris entre x et x +dx, montrer que :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - \frac{2h}{\mu c r}(T(x,t) - T_{air})$$

Système : la tranche de barre de section $S = \pi r^2$, comprise entre x et x+dx

Premier principe au système entre t et t+dt : $dU = \delta Q_{\text{« entrant » en x}} + \delta Q_{\text{« entrant » en x+dx}} - \delta Q_{\text{« perdue » latéralement}}$

- $dU = dmcdT = \mu\pi r^2 dxcdT = \mu\pi r^2 dxc\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)dt$
- $\delta Q_{\text{« entrant » en x}} = j_Q(x,t).\ \pi r^2.dt$
- $\delta Q_{\text{« entrant » en x+dx}} = -j_Q(x+dx,t).\ \pi r^2.dt$
- $\delta Q_{\text{« perdue » latéralement}} = h(T(x,t) - T_{air}).2\pi r dx.dt$

Donc : $\mu\pi r^2 dxc\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)dt = -[j_Q(x+dx,t) - j_Q(x,t)]\pi r^2 dt - h(T(x,t) - T_{air})2\pi r dx dt$

$$\mu r dxc\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x,t)dxr - h(T(x,t) - T_{air})2dx \quad \text{avec } j_Q(x,t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \quad \text{(loi de Fourier)}$$

D'où : $\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - \frac{2h}{\mu c r}(T(x,t) - T_{air})}$

Question 3 : Déterminer la solution T(x) de cette équation différentielle en régime stationnaire et montrer que la distance caractéristique de variation de T(x) est : $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$

En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc : $\frac{d^2T}{dx^2}(x) - \frac{2h}{\lambda r}T(x) = -\frac{2h}{\lambda r}T_{air}$

La solution est : $T(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{\frac{x}{\delta}} + T_{air}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$

Pour x = ℓ grand, la température doit tendre vers T_{air} donc B = 0
Pour x = 0 : $T(0) = T_0 = A + T_{air}$

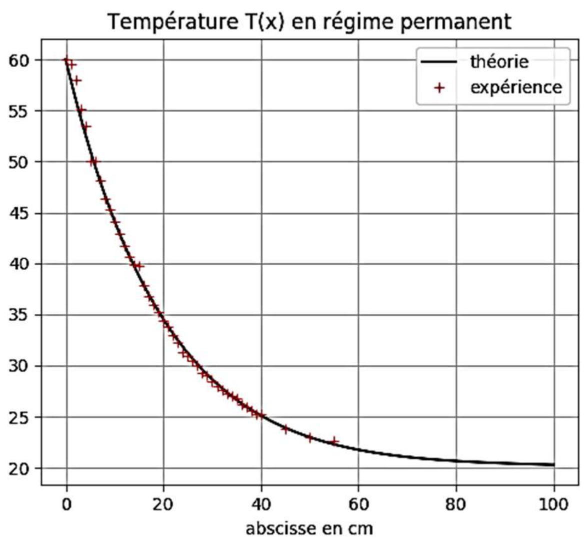
Donc : $\boxed{T(x) = (T_0 - T_{air})e^{-\frac{x}{\delta}} + T_{air}}$

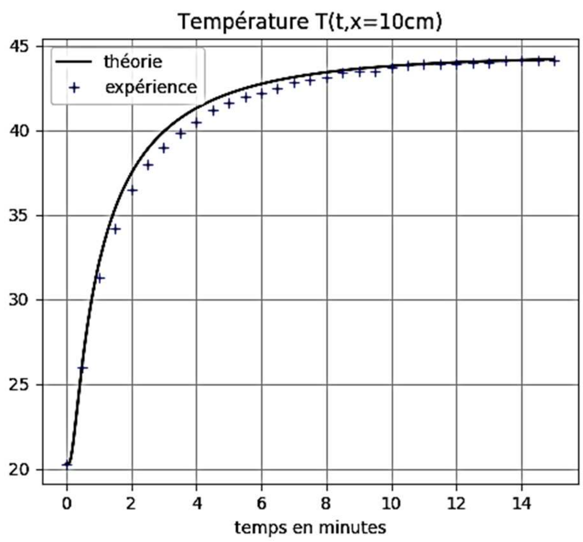
Question 4 : Compte tenu de la valeur expérimentale de δ, trouver une relation numérique entre λ et h.
En déduire un encadrement de λ.

$\delta = 0{,}19$ cm => $\frac{\lambda}{h} \approx 12$

Si : 5 W.m^{-2}.K^{-1} < h < 25 W.m^{-2}.K^{-1} , alors : 60 W.m^{-1}.K^{-1} < λ < 300 W.m^{-1}.K^{-1}

Question 5 : Utiliser le programme Python pour tester différentes valeurs du couple (λ,h) et comparer les courbes obtenues par simulation avec les courbes expérimentales.
Déterminer les valeurs de λ et h permettant le meilleur ajustement avec les courbes expérimentales





Ajustement obtenu pour : h = 15 W.m^{-2}.K^{-1} et λ = 200 W.m^{-1}.K^{-1}

Question 6 : Rechercher sur internet la valeur de la conductivité thermique de l'aluminium et comparer avec la valeur obtenue.

On trouve : $\lambda_{aluminium}$ = 226 W.m^{-1}.K^{-1}
