

Première partie

le projet Hyperloop

I l'air dans le tube

I.A - Modélisation du fonctionnement d'une pompe à palette

I.A.1)

a) La loi du gaz parfait pour un système fermé en évolution isotherme s'écrit $pV = nRT = cste$. On considère le système formé par le gaz contenu dans le réservoir et la partie de la pompe en contact avec le réservoir :

- au début de la phase d'aspiration, le volume de la pompe communiquant avec le réservoir est nul, donc le gaz occupe le volume V_0 à la pression P_0 ;
- à la fin de la phase d'aspiration, le volume de la pompe communiquant avec le réservoir est V_b , donc le gaz occupe le volume $V_0 + V_b$, à la pression P_1 ;
- la communication entre le réservoir et la pompe est alors coupée, le réservoir reste à la pression P_1 .

La loi du gaz parfait conduit alors à la relation $P_0V_0 = P_1(V_0 + V_b)$, soit

$$P_1 = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_0 < P_0$$

b) Pour les cycles suivants le raisonnement est identique, en considérant à chaque cycle les pressions initiale et finale dans le réservoir. $P_2 = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_1 = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b}\right)^2 P_0$

$$P_k = \left(\frac{V_0}{V_0 + V_b}\right)^k P_0$$

c) Les pressions successives forment une suite géométrique de raison $r = V_0/(V_0 + V_b) < 1$, de limite nulle, donc la pression minimale théorique est nulle : $P_{\min} = 0$.

d) À chaque cycle la pompe aspire le volume V_b de gaz à la pression (en fin de cycle) du réservoir, donc comme il y a ν cycle par unité de temps, le débit volumique de la pompe a pour expression $D = \nu V_b$.

I.A.2)

a) D'après la modélisation précédente, D est indépendant de la pression dans le réservoir, ce qui se traduit dans le diagramme $D = f(P)$ par une horizontale. Ceci est vérifié dans le cas de la pompe étudiée pour $P \gtrsim 2 \text{ mbar}$.

Pour les faibles pressions, la chute du débit volumique peut s'expliquer l'existence d'un volume résiduel qu'on ne parvient pas à chasser vers l'extérieur : le volume situé sur le dessin sous la

soupape de refoulement. La partie haute du rotor n'étant pas en contact avec le stator, il y a de l'air qui peut repasser en direction du réservoir.

b) Comme précédemment, on peut dénombrer les moles de gaz en divisant PV par RT . Mais comme RT est une constante dans cette question, inutile de le faire intervenir.

* Premier cycle : $P_0V_0 + P_0V_f = P_1(V_0 + V_b)$, d'où $P_1 = P_0a + P_0b$,

en posant $\mathbf{a} = \frac{V_0}{V_0+V_b}$ et $\mathbf{b} = \frac{V_f}{V_0+V_b}$.

* Second cycle : $P_1V_0 + P_0V_f = P_2(V_0 + V_b)$, d'où $P_2 = P_1a + P_0b = P_0a^2 + P_0ab + P_0b$.

* Troisième cycle : $P_2V_0 + P_0V_f = P_3(V_0 + V_b)$, d'où $P_3 = P_2a + P_0b = P_0a^3 + P_0a^2b + P_0ab + P_0b$.

$$\text{D'où } P_k = P_0a^k + P_0b(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}) = P_0a^k + P_0b\frac{1-a^k}{1-a}.$$

On voit que quand k tend vers ∞ , la pression tend vers $P_\infty = P_0b\frac{1}{1-a}$, qui est une valeur finie. Ce modèle donne donc une pression minimale en-dessous de laquelle on ne peut pas descendre, ce qui se traduit par une asymptote verticale sur la courbe donnant le débit en fonction de la pression. C'est plus conforme à la figure 2.

c) D'après la question précédente, et puisque $1 - a = \frac{V_b}{V_0+V_b}$, la pression minimale correspond

à $P'_{\min} = P_0\frac{V_f}{V_b}$. On peut retrouver ceci en disant (point fixe) que $P_kV_0 + P_0V_f = P_{k+1}(V_0 + V_b)$, avec $P_{k+1} = P_k = P'_{\min}$, d'où $P'_{\min}V_b = P_0V_f$.

d) Comme déjà dit au a), il doit y avoir un espace entre le haut du rotor et le stator, avec de l'air à la pression P_0 qui est resté sous la soupape (et ne l'a pas franchie) et qui se rajoute à l'air venant du réservoir. Et le calcul du b) doit permettre de retrouver l'allure de la courbe.

e) On a montré en b) que la prise en compte du volume résiduel et des fuites permet d'interpréter la figure 2, mais il faudrait à présent étudier si la courbe correspond bien au modèle établi.

I.B - Faire le vide

I.B.1)

Le domaine de pression dans lequel doit travailler la pompe est situé sur **la partie quasi-horizontale** de la caractéristique de la pompe, ce qui correspond à la première modélisation envisagée.

Les pompes travaillant en parallèle les débits volumiques s'ajoutent, et dans le modèle simplifié

$$D_t = ND = N\nu V_b$$

I.B.2)

D'après la question I.1, au bout de k cycles, et pour N pompes travaillant en parallèle sur la conduite de volume V , on a $P_k = P_0 \left(\frac{V}{V+NV_b} \right)^k$ or le nombre de cycles effectués sur la durée Δt a pour expression $k = \nu\Delta t$, d'où $P(\Delta t) = P_0 \left(\frac{V}{V+NV_b} \right)^{\nu\Delta t}$.

En passant aux logarithmes, $\ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = -\nu\Delta t \ln \left(1 + \frac{NV_b}{V} \right)$.

Dans l'approximation $NV_b \ll V$, on peut alors écrire $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \simeq -\nu\Delta t\left(\frac{NV_b}{V}\right)$ et finalement $\Delta t = \frac{\ln\left(\frac{P_0}{P}\right)}{\nu\frac{NV_b}{V}}$, puis $\Delta t = \frac{V}{D_t} \ln\left(\frac{P_0}{P}\right)$.

I.B.3)

Applications numériques $V = L \times \pi \frac{d^2}{4} = 2,34 \times 10^6 \text{ m}^3$; $N = \frac{L}{\Delta L} = \frac{600}{2} = 300$, puisqu'il faut une pompe tous les $\Delta L = 2 \text{ km}$.

On lit sur la caractéristique, pour l'asymptote horizontale $D \approx 270 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$, soit $D_t = ND = 8,1 \times 10^4 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ puis, en conservant les heures comme unité de temps $\Delta t = 1,8 \times 10^2 \text{ h}$.

I.C - Déplacer l'air restant

I.C.1)

a) Pour un écoulement stationnaire entre un point A et un point B , on peut écrire les deux relations équivalentes $\left[h + \frac{v^2}{2} + e_p \right]_A^B = w_u + q$; $D_m \left[h + \frac{v^2}{2} + e_p \right]_A^B = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$ où

- h représente l'enthalpie massique du fluide ;
- v sa vitesse, $v^2/2$ son énergie cinétique massique ;
- e_p son énergie potentielle massique ;
- $\left[\right]_A^B$ la variation des grandeurs entre le point A et la point B , calculée dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme sur chaque section droite considérée ;
- w_u le travail massique utile (hors travail de transvasement) reçu par le fluide entre A et B ;
- q le transfert thermique massique reçu par le fluide entre A et B ;
- D_m le débit massique du fluide s'écoulant entre A et B , identique en A et B pour un écoulement stationnaire ;
- $\mathcal{P}_u = D_m w_u$ la puissance mécanique utile reçue par le fluide entre A et B ;
- $\mathcal{P}_{th} = D_m q$ la puissance thermique reçue par le fluide entre A et B .

b)

- on néglige les variations d'énergies cinétique et potentielle, donc seule l'enthalpie du fluide varie ;
- la transformation est adiabatique, donc $q = 0$ et $\mathcal{P}_{th} = 0$;

On peut donc écrire en notant h_e et h_s les enthalpies massiques de l'air à l'entrée et à la sortie du compresseur $h_s - h_e = w_u$; $D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_u$.

I.C.2)

L'air est assimilé au gaz parfait : $PV = nRT$, soit $PV = \frac{m}{\mathcal{M}_{air}}RT$; $P = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mathcal{M}_{air}} = \rho_{air} \frac{RT}{\mathcal{M}_{air}}$

$$\rho_{air} = \frac{P \mathcal{M}_{air}}{RT} = 1,19 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}.$$

I.C.3)

L'air est assimilé au gaz parfait, donc d'après la seconde loi de Joule $\Delta h = c_{pm} \Delta T$ où c_{pm} est la capacité thermique massique de l'air. On pourrait ajouter que $c_{pm} = \frac{\gamma R}{\mathcal{M}_{air}(\gamma-1)}$ mais l'énoncé

donne c_{pm} à la fin du texte donc autant s'en servir.

I.C.4)

a) Si S est la section d'entrée du compresseur $D_m = \rho S v$.

b)
$$D_m = \rho \pi R^2 v = 1,19 \times 10^{-3} \times \pi \times 0,63^2 \times \frac{1200 \times 10^3}{3600} = 0,493 \text{ kg s}^{-1}.$$

I.C.5)

On reprend l'expression du premier principe $D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{cs}$ puis on exprime la variation d'enthalpie massique en fonction de la variation de température $D_m c_{pm}(T_{cs} - T) = \mathcal{P}_{cs}$.

I.C.6)

La relation précédente permet d'exprimer T_{cs} : $T_{cs} = T + \frac{\mathcal{P}_u}{D_m c_{pm}}$ soit, avec $T = 292 \text{ K}$, $\mathcal{P}_u = 328 \text{ kW}$, $c_{pm} = 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ et $D_m = 0,493 \text{ kg s}^{-1}$ $T_{cs} = 950 \text{ K}$.

I.C.7)

La transformation de l'air dans le compresseur est adiabatique et réversible, donc d'après la loi de Laplace (pour le gaz parfait) : $P^{1-\gamma} T^\gamma = cste$. Soit $P_{cs} = \left(\frac{T_{cs}}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P = 6,22 \text{ kPa} = 62,2 \text{ mbar}$.

I.C.8)

a) La premier principe d'écrit pour chacun des fluides en écoulement stationnaire, en l'absence de variations d'énergies cinétique et potentielle, et de travail utile (pas de pièce mobile)

$$h_{as} - h_{ae} = q_{\text{eau} \rightarrow \text{air}}; \quad h_{es} - h_{ee} = q_{\text{air} \rightarrow \text{eau}}.$$

b) L'air ne subit pas de changement d'état $h_{as} - h_{ae} = c_{pm}(T_{as} - T_{ae})$.

L'eau subit un échauffement de T_{ee} à T_{es} , puis une vaporisation partielle, isobare à T_{es} , d'une fraction x : $h_{es} - h_{ee} = c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + x l_e$.

c) On déduit alors du premier principe les transferts thermiques massiques :

$$q_{\text{eau} \rightarrow \text{air}} = c_{pm}(T_{as} - T_{ae}); \quad q_{\text{air} \rightarrow \text{eau}} = c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + x l_e$$

I.C.9)

On passe aux puissances en multipliant par les débits massiques respectifs :

$$\mathcal{P}_{\text{eau} \rightarrow \text{air}} = D_m c_{pm}(T_{as} - T_{ae}); \quad \mathcal{P}_{\text{air} \rightarrow \text{eau}} = D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + x l_e)$$

I.C.10)

L'échangeur étant calorifugé, l'eau et l'air ne reçoivent aucun autre transfert thermique que ceux calculés ci-dessus : les puissances thermiques reçues par l'eau et l'air sont opposées :

$\mathcal{P}_{\rightarrow\text{air}} = \mathcal{P}_{\text{eau}\rightarrow\text{air}} - \mathcal{P}_{\rightarrow\text{eau}}$. On en déduit la relation $D_m c_{pm}(T_{as} - T_{ae}) = -D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + x l_e)$ puis l'expression de la température de sortie de l'air, avec la température d'entrée de l'air T_{ae} égale à sa température de sortie du compresseur T_{cs} :

$$T_{as} = T_{cs} - \frac{D_e (c_{em}(T_{es} - T_{ee}) + x l_e)}{D_m c_{pm}} = 293 \text{ K}.$$

II l'alimentation électrique du compresseur

II.A - le choix du lithium

II.A.1)

${}^7_3\text{Li}$ est composé :

- d'un nuage électronique de $Z=3$ électrons ;
- d'un noyau atomique formé de $A = 7$ nucléons : $Z=3$ protons et $A-Z=4$ neutrons.

II.A.2)

Configuration électronique ($Z = 3$) : $1s^2 2s^1$

II.A.3)

- $N = 2$: le lithium se situe sur la seconde ligne du tableau périodique ;
 - Ns^1 : le lithium se situe sur la première colonne du tableau périodique.
- Il s'agit donc d'un alcalin .

II.A.4)

L'électronégativité $\text{croît de la gauche vers la droite}$ du tableau périodique, donc le lithium est $\text{très peu électronégatif}$.

II.A.5)

Li, de structure électronique $1s^2 2s^1$ peut prendre facilement la structure du gaz rare précédent (l'hélium) en $\text{perdant un électron}$ pour donner Li^+ ce qui justifie son caractère réducteur.

II.A.6)

La maille élémentaire du lithium comporte :

- un atome à chacun des 8 sommets de la maille, partagé entre 8 mailles voisines, soit $8 \times 1/8 = 1$ atome en propre ;
- un atome au centre de la maille appartenant en propre à la maille.

Soit au total 2 atomes par maille.

L'atome au centre de la maille a pour plus proches voisins les 8 atomes situés à chacun des sommets de la maille, et un atome à l'un des sommets de la maille a pour plus proches voisins les atomes occupant les centres des 8 mailles entre lesquelles il est partagé,

soit une coordinence de 8 : $C = 8$

Les atomes plus proches voisins sont tangents, donc le rayon atomique R vérifie, en considérant les atomes situés sur une grande diagonale de la maille, $4R = a\sqrt{3}$; $R = a\frac{\sqrt{3}}{4}$ Le volume occupé par les deux atomes contenus en propre dans la maille a pour expression $V_a = 2\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi}{3}\frac{3\sqrt{3}}{4\times 16}a^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}a^3$ Le volume total de la maille vaut $V_m = a^3$, donc la compacité vaut :

$$C = \frac{V_a}{V_m} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 0,68 = 68\% . \text{ Il ne s'agit pas d'une structure compacte}$$

II.A.7)

La maille élémentaire de volume a^3 contient 2 atomes $\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M(\text{Li})}{N_a a^3} = 54 \times 10^1 \text{ kg m}^{-3}$

II.A.8)

D'après ce qui précède l'intérêt du lithium provient de son pouvoir réducteur élevé (potentiel standard faible), et de sa masse molaire faible pour un solide : il peut donc être utilisé dans des réactions électrochimiques de tension associée élevée, avec une masse nécessaire pour un nombre d'électrons mis en jeu identique plus faible que dans le cas d'autres composés : on obtient ainsi une énergie massique élevée.

II.B - Accumulateur Li-ion

II.B.1) l'électrode négative

a) Réduction de Li^+ : $\text{Li}^+ + e^- = \text{Li}$ insertion $\text{Li} + \text{C}_6 = \text{LiC}_6$ demi-réaction bilan de la charge (combinaison des deux réactions précédentes) $\text{Li}^+ + \text{C}_6 + e^- = \text{LiC}_6$.

b) D'après la stœchiométrie de la réaction d'insertion, on peut insérer au plus 1 atome de lithium dans une masse de graphite correspond à 6 atomes de C, c'est-à-dire dans une masse $\frac{6M(\text{C})}{N_A}$ de graphite. Donc dans une masse de 1 g de graphite, on peut au maximum insérer

$$N_{\max} = \frac{1}{\frac{6M(\text{C})}{N_A}} = \frac{N_A}{6M(\text{C})} = 8,36 \times 10^{21} \text{ atomes de lithium, puisque M est à prendre en grammes.}$$

Attention, la question *ii* est ambiguë : on ne sait pas s'il faut exprimer la charge par gramme de graphite, ou par gramme de graphite lithié.

Ce serait plus logique de calculer ce qui caractérise vraiment l'électrode, donc de calculer par gramme de graphite lithié. Mais, du coup, ça n'utiliserait pas la question *i*. Faisons quand-même cela :

Chaque atome de lithium peut libérer un électron de charge $|q_e|$, d'où la capacité de l'électrode de graphite lithié :

$$q_{\max} = \frac{N_A |q_e|}{6M(\text{C}) + M(\text{Li})} = 1,22 \times 10^3 \text{ C g}^{-1} .$$

$$q_{\max} = 1,22 \times 10^3 \text{ A s g}^{-1} = 1,22 \times 10^3 \times 1000 \text{ mA} \times \frac{1}{3600} \text{ h g}^{-1} = 339 \text{ mA h g}^{-1} .$$

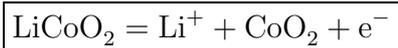
II.B.2) l'électrode positive

a)

- Pour CoO_2 , espèce neutre, $no(\text{Co}) + 2no(\text{O}) = no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = q = 0$ $\boxed{no(\text{Co}) = +\text{IV}}$;
- pour LiCoO_2 , $(+\text{I}) + no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = 0$ $\boxed{no(\text{Co}) = +\text{III}}$.

Dans le couple ($\text{CoO}_2/\text{LiCoO}_2$) du cobalt, le nombre d'oxydation du cobalt est plus élevé dans CoO_2 (+IV) que dans LiCoO_2 (+III), donc $\boxed{\text{l'oxydant est } \text{CoO}_2, \text{ le réducteur } \text{LiCoO}_2}$.

b) Lors de la charge, il y a oxydation du cobalt, donc augmentation de son nombre d'oxydation, tandis que les nombres d'oxydation des autres espèces sont inchangés. En particulier le lithium reste au nombre d'oxydation +I, donc sous la forme Li^+ . La demi-réaction associée s'écrit



II.B.3)

Lors de la charge, les deux demi-réactions sont celles écrites précédemment :

$\text{Li}^+ + \text{C}_6 + \text{e}^- = \text{LiC}_6$ et $\text{LiCoO}_2 = \text{Li}^+ + \text{CoO}_2 + \text{e}^-$, d'où l'équation-bilan complète :

$\boxed{\text{LiCoO}_2 + \text{C}_6 = \text{CoO}_2 + \text{LiC}_6}$, dans laquelle un électron est échangé.

Lors de la décharge la réaction est inversée $\boxed{\text{CoO}_2 + \text{LiC}_6 = \text{LiCoO}_2 + \text{C}_6}$.

II.B.4)

a) Le trajet dure 35 minutes, mais visiblement, le compresseur doit fonctionner pendant 45 minutes, sans doute pour mettre le tube en dépression un peu avant le passage de la capsule. La batterie fournit une puissance $P = 328 \text{ kW}$ pendant $\Delta t = 45 \text{ min}$, soit une énergie

$$W = P\Delta t = 328 \times 10^3 \times 45 \times 60 = \boxed{886 \text{ MJ}}; W = 8,86 \times 10^8 \text{ J} \times \frac{1}{3600} \text{ h} = \boxed{246 \text{ kWh}}$$

b) La batterie de masse $m = 1500 \text{ kg}$ doit fournir $P = 328 \text{ kW}$ soit une puissance massique

$$\boxed{p_m = \frac{P}{m} = 219 \text{ W kg}^{-1}}$$

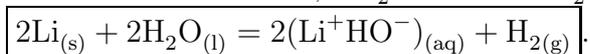
c) La batterie doit délivrer W , soit une énergie massique $\boxed{E_m = \frac{W}{m} = 164 \text{ Wh kg}^{-1}}$.

d) La figure 5 représente la puissance massique en fonction de l'énergie massique. D'après les calculs qui précèdent, seul les $\boxed{\text{accumulateurs Li-ion haute énergie (Li-ion High energy)}}$ possèdent une énergie massique suffisante ($E_m \approx 170 \text{ Wh kg}^{-1}$) de tous les types proposés. On vérifie également que la puissance massique nécessaire (219 W kg^{-1}) est située dans la plage disponible pour ce type d'accumulateurs, comprise entre 10 et 1000 Wh kg^{-1} .

II.C - le choix de l'électrolyte

II.C.1)

a) Les demi-réactions d'oxydation du lithium et de réduction de l'eau (*a priori* à pH neutre) s'écrivent $\text{Li} = \text{Li}^+ + \text{e}^-$; $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- = \text{H}_2 + 2\text{HO}^-$ soit la réaction



b) D'après les données de l'énoncé $\Delta_r H^0 = -446 \text{ kJ mol}^{-1} < 0$ La réaction est bien fortement **exothermique**.

c) La réaction se produit avec formation de gaz, donc qualitativement $\Delta_r S^0 > 0$. On en déduit $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0 < 0$, et finalement $K^0 \gg 1$:

la réaction du lithium avec l'eau est **spontanée, et très exothermique**. Il faut donc utiliser d'un électrolyte non aqueux pour éviter la réaction parasite du lithium avec l'eau.

II.C.2)

L'utilisation de la loi de Kohlrausch et des données de l'énoncé permet d'écrire pour la solution de KCl, en prenant garde aux unités :

$$\sigma = \lambda_{\text{K}^+}[\text{K}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-}[\text{Cl}^-] = 7,35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 + 7,63 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = 44,9 \text{ S m}^{-1} = 449 \text{ mS cm}^{-1}.$$

La conductivité de l'électrolyte est de l'ordre de 10 mS cm^{-1} , très inférieure à celle de la solution de référence : l'électrolyte utilisé n'est **pas très bon conducteur**.

III la propulsion de la capsule

III.A - production du champ magnétique

III.A.1)

a) La circulation du champ magnétique sur une courbe fermée est égale au produit de la perméabilité magnétique du vide μ_0 par l'intensité enlacée par la courbe $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$.

b) Calcul classique du cours. Si le courant i est orienté dans le sens direct par rapport à Oz , $\vec{B} = \mu_0 ni \vec{e}_z$.

III.A.2)

a) Question pas claire! Visiblement, on attend de nous que nous remplacions B_0 par $\mu_0 ni(t)$, en provenance de la question précédente. Mais ce n'est pas clairement expliqué!

Le champ magnétique assimilé à sa composante spatiale fondamentale s'écrit :

$\vec{B}(x, t) = \frac{4\mu_0 ni(t)}{\pi} \sin(kx) \vec{u}_z$. En exprimant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, on trouve finalement :

$$\vec{B}(x, t) = B'_0 \cos(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_z.$$

b) On utilise le formulaire pour transformer l'expression précédente en :

$$\vec{B}(x, t) = \frac{B'_0}{2} (\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) \vec{u}_z.$$

Il s'agit de la superposition de deux ondes progressives :

— se propageant selon les x croissants $\vec{B}_+(x, t) = \frac{B'_0}{2} \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$ de vecteur d'onde et

$$\text{vitesse de phase } \vec{k} = k\vec{u}_x; \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi};$$

— se propageant selon les x décroissants $\vec{B}_-(x, t) = \frac{B'_0}{2} \sin(kx + \omega t) \vec{u}_z$ de vecteur d'onde et vitesse de phase $\boxed{\vec{k} = -k\vec{u}_x}$; $\boxed{v_\varphi = \frac{\lambda\omega}{2\pi}}$ (les deux ondes ont même vitesse de phase).

III.A.3)

Qualitativement, lorsqu'on se déplace selon les x croissants, chaque paire de solénoïdes est en retard par rapport à la précédente de $T/3$ où T est la période temporelle. Donc à l'instant $t' = t + T/3$ il y a décalage spatial du champ d'une paire de solénoïde donc de $\lambda/3$ dans le sens des x croissants par rapport à sa forme à l'instant t : le champ se propage selon les x croissants à la vitesse de phase λ/T .

Pour effectuer le calcul, on peut faire apparaître les deux ondes progressives se propageant selon chacune de direction $\pm x$ pour chacun des termes de l'expression de \vec{B} , en utilisant le formulaire ($2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b)$) :

$$\vec{B} = \frac{B'_0}{2} (\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t - \frac{4\pi}{3}) + \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t - \frac{8\pi}{3}) + \sin(kx - \omega t)) \vec{u}_z$$

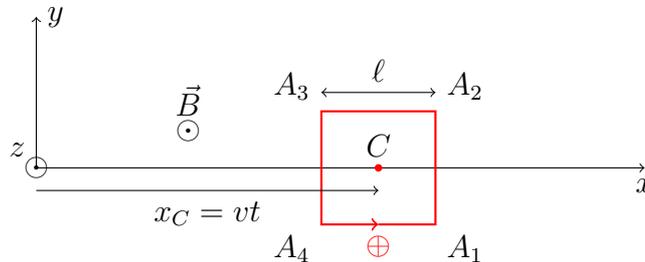
On montre facilement que les termes correspondant aux ondes se propageant selon les x décroissants se compensent (somme des sinus de 3 angles décalés d'un tiers de tour deux à deux), et il reste :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{3B'_0}{2} \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z}$$

Il s'agit bien d'une onde se propageant selon \vec{u}_x , d'amplitude $\boxed{3B'_0/2}$.

III.B - Force s'exerçant sur le rotor

III.B.1)



Bien que ce ne soit pas clairement dit, on suppose apparemment ici que le "rotor" (c'est-à-dire la spire) avance à vitesse v constante. Donc le centre C de la spire a pour abscisse $x_C = vt$. En orientant la spire de sorte que sa normale soit dirigée selon \vec{u}_z

$$\boxed{\phi(t) = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \approx \vec{B}(x_C, t) \cdot S\vec{u}_z = \frac{3B'_0 \ell^2}{2} \sin(kx_C - \omega t) = \frac{3B'_0 \ell^2}{2} \sin((kv - \omega)t)}$$

III.B.2)

D'après la loi de Faraday, la fém e , choisie dans le même sens que le courant, est :

$$\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{3B'_0 \ell^2}{2} (\omega - kv) \cos((kv - \omega)t)}$$

III.B.3)

En négligeant l'auto-induction (l'énoncé ne le propose pas, mais en l'absence de toute information, on peut faire cette hypothèse) l'équation électrique de la spire s'écrit simplement, puisque l'on a fait le choix d'orienter le courant et la fém dans le même sens : $e = Ri$, soit :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{3B_0'\ell^2}{2R} (\omega - kv) \cos((kv - \omega)t).$$

III.B.4)

La force de Laplace élémentaire a pour expression $d\vec{F} = id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

— sur les deux côtés de la spire parallèles à l'axe Ox , (A_2A_3) et (A_4A_1) , le profil du champ magnétique $\vec{B}(x, t)$ est le même, mais l'intensité circule en sens opposé : pour deux éléments de longueur $d\ell$ situés à la même abscisse x , les forces de Laplace élémentaires se compensent, et la résultante des forces de Laplace sur ces deux côtés est nulle (et sans action si le cadre est indéformable) ;

— sur le côté (A_1A_2) d'abscisse $x = x_C + \ell/2$,

$d\vec{F} = i(t)d\ell \wedge \vec{B} = i(t)dy\vec{u}_y \wedge B(x_C + \frac{\ell}{2}, t)\vec{u}_z = i(t)B(x_C + \frac{\ell}{2}, t)dy\vec{u}_x$ Comme le courant circule dans le sens des y croissants sur ce côté, la résultante des forces de Laplace sur ce côté de spire a pour expression $\vec{F}_{12} = i(t)B(x_C + \frac{\ell}{2}, t)\ell\vec{u}_x = i(t)\frac{3B_0'\ell}{2} \sin(k(x_C + \frac{\ell}{2}) - \omega t)\vec{u}_x$

— sur le côté (A_3A_4) d'abscisse $x = x_C - \ell/2$, la valeur du champ est modifiée ainsi que le sens de parcours de l'intensité.

On obtient $\vec{F}_{34} = -i(t)B(x_C - \frac{\ell}{2}, t)\ell\vec{u}_x = -i(t)\frac{3B_0'\ell}{2} \sin(k(x_C - \frac{\ell}{2}) - \omega t)\vec{u}_x$

Finalement la résultante des actions de Laplace sur la spire a pour expression :

$\vec{F} = i(t)\frac{3B_0'\ell}{2} (\sin(k(x_C + \frac{\ell}{2}) - \omega t) - \sin(k(x_C - \frac{\ell}{2}) - \omega t))\vec{u}_x$ La différence des sinus s'écrit sous la forme $\sin(a+b) - \sin(a-b) = \sin(b+a) + \sin(b-a) = 2\sin(b)\cos(a)$.

D'où $\vec{F} = i(t)3B_0'\ell \sin(\frac{k\ell}{2}) \cos(kx_C - \omega t)$.

On peut alors remplacer $i(t)$ et x_C par leurs expressions, et simplifier le sinus dans le cadre de l'hypothèse $l \ll \lambda$ utilisée pour le calcul de ϕ : $\sin(\frac{k\ell}{2}) \approx \frac{k\ell}{2}$.

$\vec{F} = \frac{k(3B_0'\ell^2)^2}{4R} (\omega - kv) \cos^2((kv - \omega)t)\vec{u}_x$.

En remarquant enfin que $\omega - kv = k(v_\varphi - v)$ où v_φ désigne la vitesse de phase de l'onde de champ magnétique, l'expression de la force de Laplace instantanée devient :

$\vec{F}(t) = \frac{(3kB_0'\ell^2)^2}{4R} (v_\varphi - v) \cos^2((kv - \omega)t)\vec{u}_x$.

La force de Laplace varie comme $\cos^2(\omega't)$, terme dont la moyenne temporelle vaut 1/2, donc la force de Laplace moyenne a pour expression :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{(3kB_0'\ell^2)^2}{8R} (v_\varphi - v)\vec{u}_x.$$

III.B.5)

Au démarrage, $v = 0$, donc $\langle \vec{F}_{\text{démarrage}} \rangle = \frac{(3kB_0'\ell^2)^2}{8R} v_\varphi \vec{u}_x \neq \vec{0}$. La force de Laplace au démarrage est non nulle, donc la capsule peut démarrer sous l'action de cette seule force, dirigée selon les x croissants.

III.B.6)

L'orientation de la force de Laplace dépend du signe de la différence $v_\varphi - v$:

— si $0 \leq v \leq v_\varphi$, $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon les x croissants, donc la force est motrice ;

— si $v_\varphi < v$, $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon les x décroissants, et il s'agit alors d'une force de freinage.