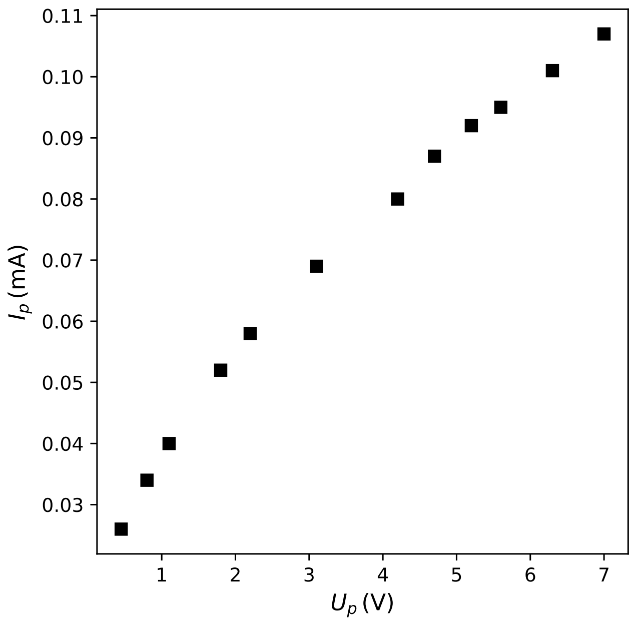
Caractéristique d'une lampe : le retour

Nous avions relevé la caractéristique d'une lampe à filament lors du cours d'électrocinétique.



On propose d'étudier cette lampe d'une point de vue thermodynamique. On étudie le filament de la lampe, il s'agit d'un fil de tungstène de longueur L de rayon r et de capacité thermique C supposée constante. Sa résistance dépend de la température T selon la loi :

$$R(T) = R_0\,(1 + \alpha\,(T - T_0))$$

Où R_0 est la résistance du fil mesurée à la température T_0, et $\alpha > 0$.
Lorsque la lampe est alimentée par une tension U et traversée par un courant I, le filament s'échauffe et on suppose que les seuls transferts thermiques sont les transferts par rayonnement. La puissance thermique cédée par le filament vers le milieu extérieur vérifie la loi de Stefan :

$$\mathcal{P}_{\text{cédée}} = S\sigma T^4$$

où S est la surface latérale du filament et $\sigma = 5{,}7.10^{-8}$ W.K^{-4}m^{-2} la constante de Stefan.

1. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au filament, montrer que T est solution de
$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = UI - S\sigma T^4$$
2. Montrer qu'en régime permanent
$$T = \left(\frac{UI}{\sigma S}\right)^{\frac{1}{4}}$$
3. En déduire que
$$U = R_0 I\left(1 + \alpha\left(\left(\frac{UI}{\sigma S}\right)^{\frac{1}{4}} - T_0\right)\right)$$
4. Expliquer, pourquoi en traçant $\frac{U}{I}$ en fonction $(UI)^{\frac{1}{4}}$ il est possible de valider ou non la modélisation faite ici.
5. Tracer cette courbe sur Capytale (code : 43da-3371642). (*Amusez-vous à faire la plus jolie courbe possible.*)

6. Conclure
7. Question bonus pour les courageux et courageuses. On alimente cette fois-ci la lampe par une tension sinusoïdale du type $u = U_0 \cos(\omega t)$, elle est alors parcourue par un courant $i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. On suppose que la température varie légèrement autour d'une valeur moyenne : $T(t) = T_0 + \theta(t)$ avec $\theta \ll T_0$. Montrer que θ est solution de

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{U_0 I_0}{2C} \cos(2\omega t + \varphi)$$

   Puis montrer que le filament agit comme un filtre passe-bas du premier ordre pour la température et dont on précisera la pulsation de coupure à -3dB.