

Problème n°1 :**Accordeur de guitare (d'après Centrale-Supélec TSI 2019)****IA – Le signal**

Q 1. Le signal varie à peu près entre 0 et 20 mV ; la valeur moyenne (c'est-à-dire la composante continue, c'est-à-dire la composante de fréquence nulle) doit être de l'ordre de 10 mV .

Q 2. On perçoit très bien qu'il y a une forme de courbe qui se répète environ toutes les $T \approx 3,2 \text{ ms}$, donc la « fréquence » de ce signal (on devrait plutôt parler de fréquence fondamentale) est $f = \frac{1}{T} \approx 0,31 \text{ kHz}$.

Q 3. D'après le tableau 1, il s'agit *a priori* de la corde **Mi aigu**.

Q 4. Oui, l'analyse spectrale de ce signal fera apparaître des harmoniques : on voit bien que le signal, bien que périodique, n'est pas une sinusoïde pure. Sa décomposition en série de Fourier fera donc apparaître des raies à des fréquences multiples de celle du fondamental.

Q 5. Puisque les deux dipôles sont en série, le théorème du pont diviseur de tension donne :

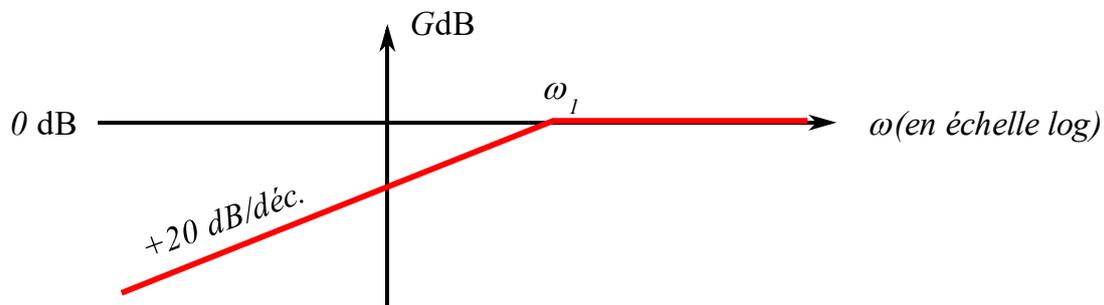
$$H_1(j\omega) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

Q 6. On reconnaît la forme canonique d'un **filtre passe-haut d'ordre 1** (et on voit bien que le module de la fonction de transfert tend 0 quand la fréquence tend vers 0, et vers 1 quand la fréquence tend vers l'infini).

On peut encore écrire

$$H_1(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}, \text{ avec } \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} = \text{pulsation caractéristique} = \text{pulsation de coupure à } -3\text{dB}.$$

Q 7. Compte tenu des limites évoquées à la question précédente, on a directement le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain :



Q 8. Numériquement, $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 15,9 \text{ Hz}$.

Au vu du signal de la figure 2, ce premier filtre sert à **éliminer la composante continue**, puisque **sa fréquence de coupure basse est située nettement avant la fréquence du fondamental**.

Q 9. Tout d'abord, une précision de langage : l'énoncé parle de deux filtres pour la figure 4, mais comme on le verra plus loin, le premier sera un amplificateur, pas un filtre.

A l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient immédiatement : $H = 1 + \frac{Z'}{Z}$.

Q 10. Si les deux impédances sont des résistances, cela donne $H = 1 + \frac{R'}{R}$. C'est un **amplificateur** (non inverseur).

Q 11. Les deux impédances étant en parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent, d'où $Z_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Q 12. Le montage étant du type de celui de la figure 4a, il vient $H_2 = 1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Q 13. C'est bien la forme demandée, avec $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$.

Q 14. La limite en basse fréquence de $|H_2|$ est $1 + \frac{R_2}{R_3}$, et celle en haute fréquence est 1 .

Q 15. La fréquence caractéristique est $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 498 \text{ Hz}$. $G_0 = 113$. Le rôle de ce second système linéaire est de **renforcer le poids du fondamental par rapport aux harmoniques**, ce qui permettra ensuite d'extraire plus facilement le fondamental avec le filtre très sélectif.

Q 16. Le filtre (Fc) est clairement un **filtre passe-bande d'ordre 2** : on devine très bien les asymptotes à +20dB/déc. et à -20 dB/déc. en très basse et très haute fréquence.

Sa fréquence centrale caractéristique est $f_{ac} = 329 \text{ Hz}$ (même 329,6, d'après le tableau 1, mais la lecture graphique ne permet pas une telle précision de lecture).

Q 17. Notons f_b et f_h les fréquences de coupure basse et haute à -3 dB, c'est-à-dire celles pour lesquelles le gain vaut 3 dB de moins que le max. Le max étant 0 dB, ce sont donc les fréquences pour lesquelles le gain vaut -3 dB.

On lit sur la figure 5b : $f_b = 320,5 \text{ Hz}$ et $f_h = 337,5 \text{ Hz}$, d'où $\Delta f_{-3dB} = 17 \text{ Hz}$.

Q 18. Toujours sur la figure 5b, on lit pour $f = 315 \text{ Hz}$ un gain de -6 dB.

Cela signifie que le facteur d'atténuation est de 2 (la raie fondamentale est multipliée par $\frac{1}{2}$, qui est le facteur d'« amplification »).

Q 19. Le spectre de la figure 6 donne bien une raie à fréquence nulle de 10 mV (cf Q1), un fondamental à une fréquence un peu supérieure à 300 Hz ; on peut être plus précis en observant la fréquence de l'harmonique 10 : 3250 Hz, donc le fondamental est à 325 Hz. C'est cohérent avec Q2, sachant que la mesure de la période sur la figure 2 n'était pas précise.

Q 20. Le premier filtre (passe-haut d'ordre 1) avait comme seule fonction de supprimer la composante continue, sans modifier les raies de haute fréquence. C'est donc la figure 7a la bonne pour la sortie du filtre Fa.

Q 21. Pour la sortie du filtre Fb, la figure 7b ne convient pas, car toutes les raies de la figure 7a ont été amplifiées d'un même facteur, ce facteur étant de l'ordre de 25.

La figure 7c ne convient pas car il y a une composante continue ; or celle-ci a été éliminée par Fa ; elle ne peut pas être recréée par un système linéaire, qui ne peut que conserver des fréquences existantes, mais ne peut pas en rajouter.

C'est donc la figure 7d qui correspond au filtre Fb. Et, en effet, le facteur d'amplification pour le fondamental est de l'ordre de 100, qui est bien inférieur à 114. Et les raies autour de 4 kHz sont nettement moins amplifiées.

Q 22. En sortie du filtre Fc, il ne reste quasiment plus que le fondamental. Or, celui-ci est à environ 325 Hz, donc l'atténuation n'est que de 1 dB. On a donc comme spectre, une seule raie, d'amplitude quasiment égale à 1,8 V.

Le signal temporel est une belle sinusoïde, qui varie entre environ -1,8 V et +1,8 V. On ne peut pas la dessiner car on n'a aucune information sur la phase.

Q 23. L'absence de rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse permet de dire que l'ALI va fonctionner en régime saturé.

On a donc (ALI idéal en régime saturé) : $u_s(t) = +U_{sat}$ si $V^+ > V^-$ et $u_s(t) = -U_{sat}$ si $V^+ < V^-$.

Q 24. Le théorème du pont diviseur de tension donne $V^+ = \frac{R_4}{R_4+R_5} u_s$. On en déduit $\varepsilon = \frac{R_4}{R_4+R_5} u_s - u_3$.

Q 25. Pour u_s fixée, ε décroît quand u_3 croît, et ε croît quand u_3 décroît.

Q 26. Pour $\varepsilon > 0$, $u_s = +U_{sat}$. D'où $\varepsilon = \frac{R_4}{R_4+R_5} U_{sat} - u_3$. Le basculement de u_s se fera quand ε passera par la valeur 0, donc

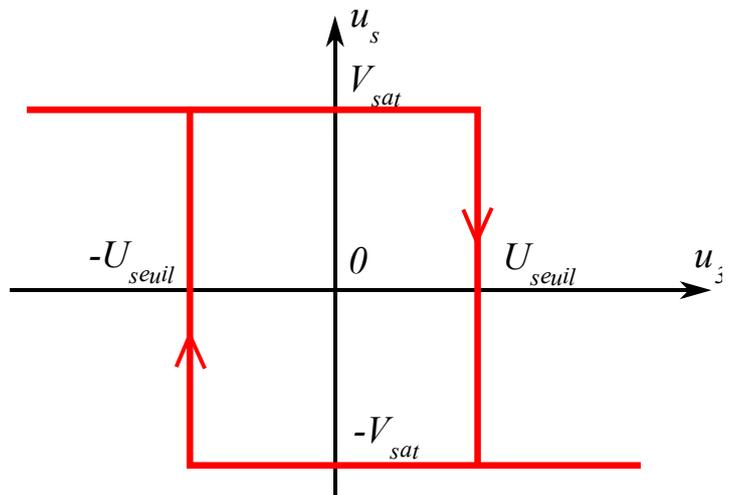
$$\text{pour } u_3 = U_{seuil} = \frac{R_4}{R_4+R_5} U_{sat}.$$

À partir de ce moment, on aura donc $\varepsilon = -\frac{R_4}{R_4+R_5} U_{sat} - u_3$.

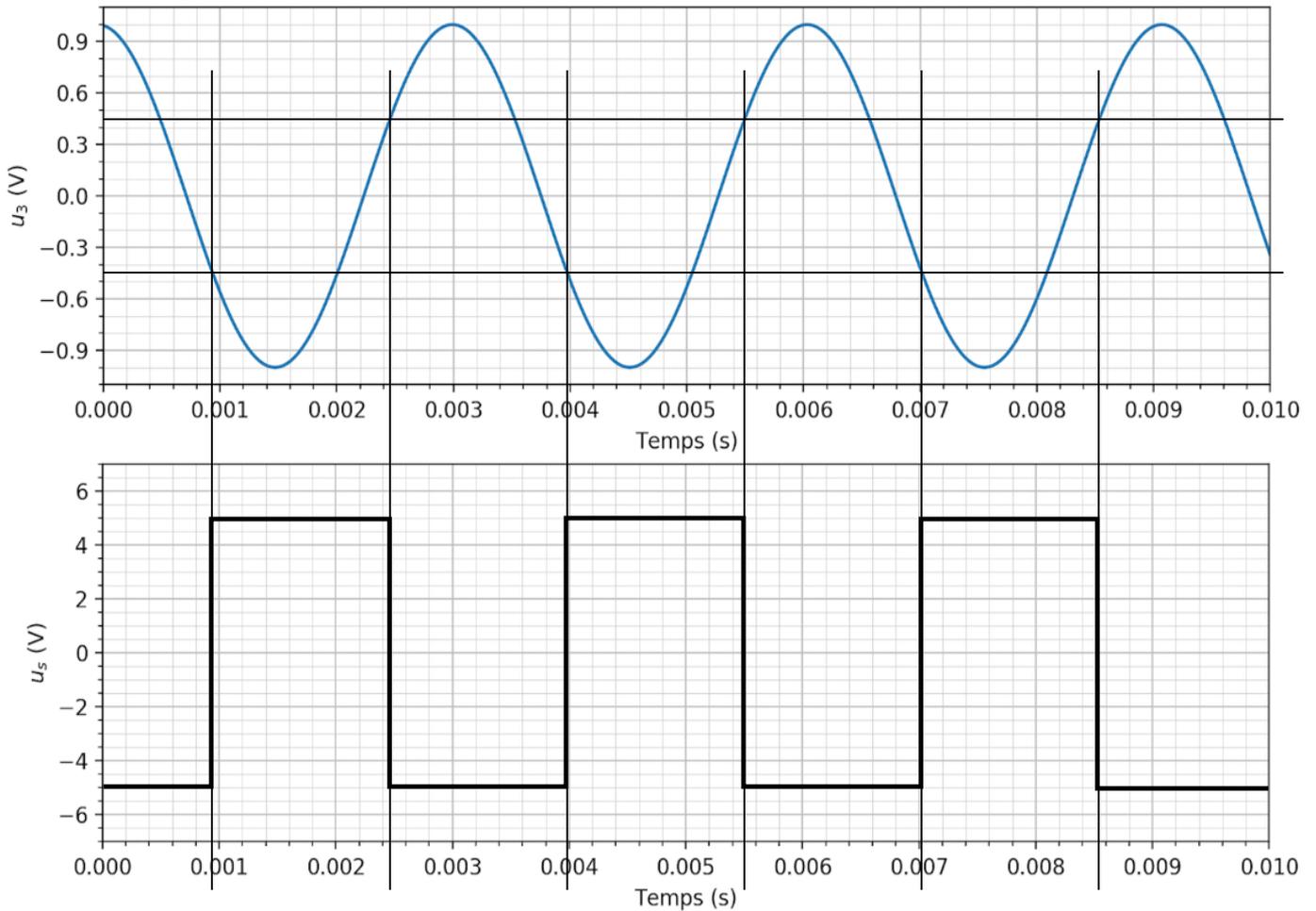
Q 27. Si u_3 diminue, il arrivera un moment où ε repassera par la valeur 0 :

$$\text{l'ALI basculera à nouveau pour } u_3 = -U_{seuil} = \frac{-R_4}{R_4+R_5} U_{sat}.$$

Q 28. Le cycle d'hystérésis est donné ci-contre



Q 29. Avec les valeurs numériques données, $U_{seuil} = 0,45 \text{ V}$, d'où le dessin ci-dessous pour le premier signal proposé pour $u_3(t)$.



Pour le second signal proposé pour $u_3(t)$, les valeurs de basculement ne sont jamais atteintes, donc $u_s(t)$ est constant. Mais on ne peut pas savoir si ce sera $+U_{sat}$ ou $-U_{sat}$, ça dépend de ce qui se sera passé (microtensions parasites) au moment où on finira de câbler le circuit.

Q 30. Si la corde est trop désaccordée, la fréquence f_{oc} sera très décalée par rapport à f_{ac} , donc le signal de sortie du filtre Fc sera une sinusoïde de faible amplitude, donc, comme dans le second cas de la question 29, $u_s(t)$ ne sera pas un créneau mais un signal constant.

Problème n°2 : Cristallographie

A) Cristallographie du gadolinium métal :

1. La phase β étant une structure de type cubique centrée, la coordinnence est **Gd/Gd = [8]**.

2. Le nombre d'atomes de gadolinium par maille est $N = \left(8 * \frac{1}{8}\right) + (1 * 1) = 2$, car il

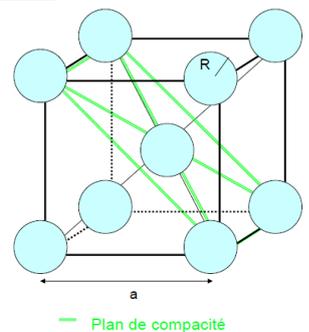
ya un atome à chaque sommet et un atome au centre de la maille.

La masse volumique est
$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = N \frac{m(1 \text{ atome Gd})}{a^3} = 2 \frac{M(\text{Gd})}{a^3 N_a}$$

3. Les atomes de rayon r sont tangents sur la grande diagonale du cube :

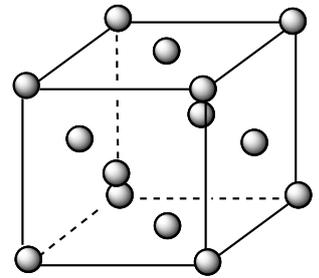
$$4r = a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

D'où **$r = 176 \text{ pm}$** Cette valeur est cohérente avec la donnée $r = 180 \text{ pm}$...



B) L'or :

- Schéma de la maille de la structure cubique faces centrées de l'or :
- La structure est dite compacte donc le taux d'occupation de l'espace est maximal, les atomes modélisés par des sphères dures ayant la coordinence (nombre de plus proches voisins) la plus élevée possible (12 ici). Les atomes d'or sont au contact suivant la diagonale des faces donc : $a\sqrt{2} = 4R_{Au}$.



- On obtient avec les données : $a = 407 \text{ pm}$.
- Les sites octaédriques se trouvent au milieu de chaque arête de la maille et il y en a un au centre de la maille, soit 4 sites octaédriques en propre. Le rayon maximal R_O d'un atome pouvant s'y insérer vérifie : $R_o + R_{Au} = \frac{a}{2}$. On obtient $R_O = 60 \text{ pm}$. Le nickel est trop volumineux pour venir s'y placer puisque $R_{Ni} = 124 \text{ pm}$.

7. Il s'agit d'un alliage de substitution.

8. L'expression est la suivante : $\rho' = \frac{3M_{Au} + M_{Ni}}{N_A a'^3}$, d'où $a' = \sqrt[3]{\frac{3M_{Au} + M_{Ni}}{N_A \rho'}}$.

9. En faisant le rapport des expressions des paramètres de maille, on obtient : $a' = a \sqrt[3]{\frac{3M_{Au} + M_{Ni}}{4M_{Au}} \frac{\rho}{\rho'}}$

En utilisant $\rho' = 0,900 \rho$ on obtient : $a' = 395 \text{ pm}$.

Problème n°3 : d'après CCP TSI 2018 Oscillateurs en électronique
Partie I – Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoidal

I.1 – Généralités

- Q1.** Partie amplificatrice : bloc de gauche avec l'ALI, R_1 et R_2 . Partie filtre : le reste (bloc de droite).
- Q2.** Le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul car l'impédance d'entrée de l'ALI est infinie.

I.2 – Étude du filtre de Wien

- Q3.** $i = C \frac{dv_c}{dt}$ « E1 ».
- Q4.** Par une loi des nœuds au point A, $i = \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt}$ « E2 ».
- Q5.** Par une loi des mailles, $v_s = Ri + v_c + v_e$ « E3 ».
- Q6.** On dérive E3 par rapport au temps, on y injecte la dérivée de E2 par rapport au temps puis on remplace des termes à l'aide de E2 et E1. On obtient bien, en posant $\tau = RC$:
- $$\frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau} \quad (7)$$

I.3 – Amplificateur

Q7. L'ALI est monté en ampli non inverseur : $\frac{v_s}{v_e} = A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

I.4 – Conditions d'oscillation

Q8. On remplace v_e par $\frac{v_s}{A}$ dans tous les termes et on obtient bien :

$$\tau^2 \frac{d^2v_s}{dt^2} + \tau(3-A) \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0 \quad (8)$$

Q9. Pour obtenir une oscillation harmonique, il faut éliminer le terme de la dérivée première : $A = 3$.

Q10. La fréquence d'oscillation est alors $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$.

Q11. L'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation provient de l'alimentation de l'ALI.

Q12. En pratique, pour obtenir une naissance spontanée des oscillations, il faut rendre le système légèrement instable : les coefficients de l'équation différentielles ne doivent pas être tous de même signe : prendre $A > 3$, légèrement.

Q13. Ce sont les saturations de l'ALI qui vont stabiliser les oscillations. Après un régime sinusoïdal désamorti, $v_s(t)$ va atteindre une première fois $\pm V_{sat}$, donc l'Ali va saturer ; l'équation différentielle régissant $v^+(t)$ va changer et donner une solution qui tend vers 0, donc l'Ali va sortir de la saturation ; à nouveau $v_s(t)$ va être une sinusoïde désamortie et ainsi de suite. Si A est à peine supérieur à 3, $v_s(t)$ va être une quasi-sinusoïde, mais avec de très courts paliers de saturation ; son amplitude sera donc V_{sat} .

Q14. Compte tenu des calculs précédents, le filtre (partie droite de la figure 5) de Wien est un filtre passe-bande. Sa tension de sortie est donc plus proche d'une sinusoïde pure (à cause du filtrage) que sa tension de sortie : C'est la tension $v_e(t)$ qui se rapproche le plus d'une sinusoïde pure.

Q15. Puisque l'Ali est presque toujours en fonctionnement linéaire, on a presque toujours $v_s = A v_e$, avec $A \approx 3$, donc l'amplitude approximative de la tension $v_e(t)$ est $\frac{V_{sat}}{3}$.

I.5 – Qualité du signal fourni

Q16. Le signal fourni n'est pas sinusoïdal puisque le spectre présente 2 raies.

Q17. On pourrait améliorer la qualité de la tension v_e en plaçant en sortie un filtre qui atténue sensiblement la seconde raie. Un filtre passe bande, de largeur de bande passante de l'ordre de 1 ou 2 kHz ; ou bien un filtre passe-bas, d'ordre 1 ou 2, de fréquence de coupure de l'ordre de 1 ou 2 kHz.

Partie II – Oscillateur à relaxation

Q18. Il n'y a pas de rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse, donc le système est instable et l'ALI fonctionne en régime saturé (donc non linéaire). La sortie v peut prendre les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$.

La sortie prend la valeur $+V_{sat}$ tant que $v^+ > v^-$, donc ici tant que $v^+ > 0$. Or, $\frac{u-v^+}{R_1} = \frac{v^+-v}{R_2}$,

c'est-à-dire $v^+ = \frac{uR_2 + vR_1}{R_1 + R_2}$. Donc $v^+ > 0$ et $v = +V_{sat}$ conduisent à $u >$

$-\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. Et si cette inégalité n'est plus vérifiée, l'ALI bascule de $+V_{sat}$ à

$-V_{sat}$. Ainsi, $u_{seuil1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Q19. Tension v en fonction de la tension u : cf ci-contre.

Q20. Le circuit 2 est le montage intégrateur pur vu en cours, pour lequel $\underline{u} = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{v}$. On en déduit l'équation différentielle : $v = -RC \frac{du}{dt}$.

Q21. Le point M_0 est sur la figure ci-contre.

Q22. L'équation différentielle donne, lorsque $v(t)$ est constante, $u(t) = -\frac{1}{RC} v t + Cte$. Et puisque les conditions initiales sont $u = 0$ et $v = -V_{sat}$, il vient pour le démarrage : $u(t) = +\frac{1}{RC} V_{sat} t$.

Ceci dure jusqu'à un instant t_1 , pour lequel $u(t_1) = u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. On

a donc $t_1 = \frac{R_1}{R_2} RC$.

Après t_1 , on a $v_s = +V_{sat}$ et $u(t) = -\frac{1}{RC} V_{sat} t + Cte_2$, qu'on peut aussi écrire $u(t) = -\frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_1) + Cte_3$. Et puisque l'ALI du circuit fonctionne en régime linéaire et est idéal, u est la tension aux bornes de C , donc est une

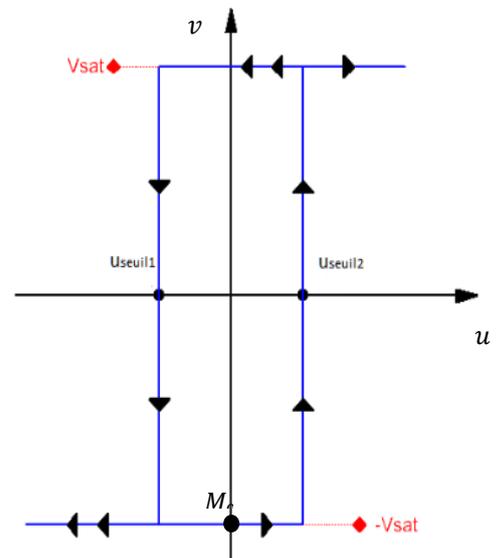
fonction continue du temps. Ainsi, $u(t_1^+) = u(t_1^-)$, donc $Cte_3 = u_{seuil2}$; $u(t) = -\frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_1) + u_{seuil2}$.

Ceci dure jusqu'à un instant t_2 , pour lequel $u(t_2) = u_{seuil1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. On a donc $t_2 - t_1 = 2 \frac{R_1}{R_2} RC$.

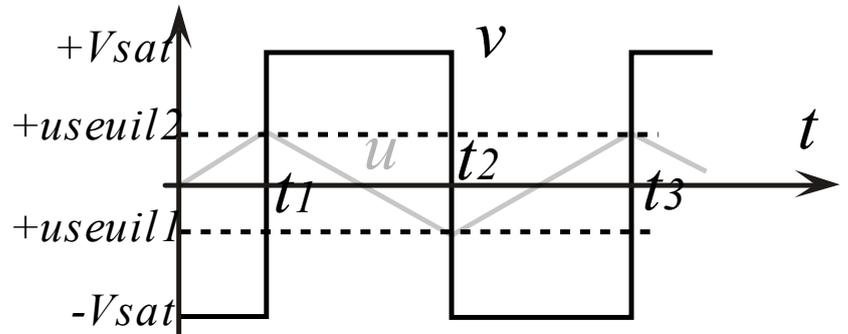
Après t_2 , on a $v_s = -V_{sat}$ et $u(t) = +\frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_2) + Cte_4$. Et $u(t_2^+) = u(t_2^-)$, donc $Cte_4 = u_{seuil1}$;

$u(t) = +\frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_2) + u_{seuil1}$.

Ceci dure jusqu'à un instant t_3 , pour lequel $u(t_3) = u_{seuil2} = +\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. On a donc $t_3 - t_2 = 2 \frac{R_1}{R_2} RC$.



On voit que l'instant t_3 est similaire à l'instant t_1 . On a ainsi atteint la fin de la période, en régime établi. D'où le dessin ci-contre.



Q23. La période du créneau $v(t)$ et du triangle $u(t)$ est $T = t_3 - t_1 = 4 \frac{R_1}{R_2} RC$. Leur fréquence fondamentale est donc $f = \frac{R_2}{4R_1RC}$.

Q24. On a vu que pour le signal triangulaire, l'amplitude est $V_{max} = u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. Il vient donc $R_1 = R_2 \frac{V_{max}}{V_{sat}}$.

Numériquement, $R_1 = 0,13 \text{ k}\Omega$. Et on déduit C de la fréquence : $C = \frac{R_2}{4R_1Rf}$. Numériquement, $C = 1,9 \mu\text{F}$.

Q25. Le slew rate de l'AL peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage.