

Pb n°1 : Techniques de contrôle non destructif

Remarques préliminaires importantes. Il est rappelé aux candidat(e)s que :

- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ;
- tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italique ont pour objet d'aider à la compréhension du problème ;
- tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.

**PROPAGATION D'UNE ONDE ULTRASONORE
DANS UNE BARRE METALLIQUE**
A / ETUDE DE LA BARRE EN TRACTION

Considérons une barre AB d'acier de longueur L à vide (sans traction) de section S et d'axe Ox , représentée sur la figure 5. Cette barre, soumise en A à l'effort $\vec{F}_A = -F \vec{u}_x$ et en B à l'effort $\vec{F}_B = +F \vec{u}_x$, passe alors de la longueur L à la longueur $L + \Delta L$. La barre, sollicitée en traction ($\Delta L > 0$) lorsque $F > 0$ et en compression ($\Delta L < 0$) lorsque $F < 0$, subit alors la contrainte de traction σ , telle que $\sigma = \frac{F}{S}$.

Si la limite d'élasticité du matériau n'est pas dépassée, il y a proportionnalité entre F et ΔL , ce qui se traduit par la loi de Hooke (1635-1703) : $\sigma = \frac{F}{S} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$, où Y est le module d'Young du matériau (le poids de la barre sera considéré comme négligeable par rapport à la force de traction).

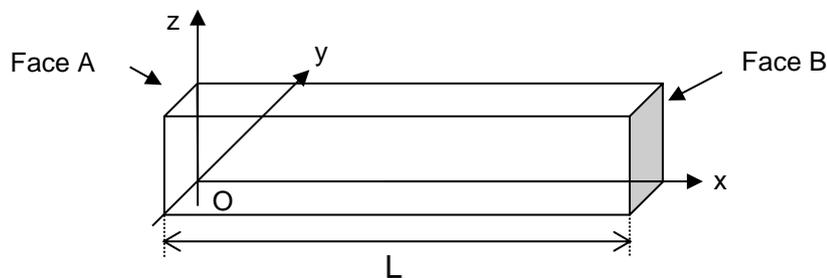


Figure 5

- A1.** Montrer simplement que la barre se comporte comme un ressort de raideur K_{eq} qu'il conviendra d'exprimer en fonction de Y , S et L .
- A2.** Calculer K_{eq} et ΔL avec les données suivantes : $L = 0,50$ m, $S = 5,0$ cm², $F = 1,0 \cdot 10^4$ N, et pour l'acier : module d'Young $Y = 2,1 \cdot 10^{11}$ N.m⁻², masse volumique $\rho = 7800$ kg.m⁻³.

Il est possible de modéliser la barre par des chaînes d'atomes parallèles à Ox , chaque atome étant relié aux voisins les plus proches par un ressort élémentaire de raideur K , comme le montre la figure 6 de la partie B. Pour les questions qui suivent, on pourra prendre appui sur la description du solide donnée au début de la partie B. Chaque unité de volume renferme n atomes et au repos, deux atomes sont distants de d .

- A3.** Quelle formule simple relie d et n ?
- A4.** Etablir la raideur $K_{parallèle}$ du ressort équivalent à deux ressorts identiques de raideur K placés en parallèle (côte à côte), puis la raideur $K_{série}$ du ressort équivalent à deux ressorts identiques de raideur K placés en série, c'est-à-dire bout-à-bout (préciser pour chaque configuration la grandeur – allongement ou force – qui est commune au ressort équivalent et aux deux ressorts identiques). Evaluer, dans la barre, le nombre de ressorts en série par chaîne, puis le nombre de chaînes de ressorts élémentaires en parallèle.
- A5.** En déduire la relation entre K_{eq} , K et d'autres paramètres, puis entre Y , K et d .

B / MODELE DE LA CHAINE INFINIE D'OSCILLATEURS

Le métal est modélisé par un réseau parallélépipédique d'atomes de masse m dont les liaisons sont représentées par des ressorts de sorte que les atomes sont disposés aux nœuds d'un réseau tridimensionnel régulier maillé en x , y , et z par trois réseaux de droites parallèles orientées selon \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z (figure 6). Les ressorts parallèles à Ox ont tous une raideur K et une longueur au repos d . Le nombre d'atomes par unité de volume est n .

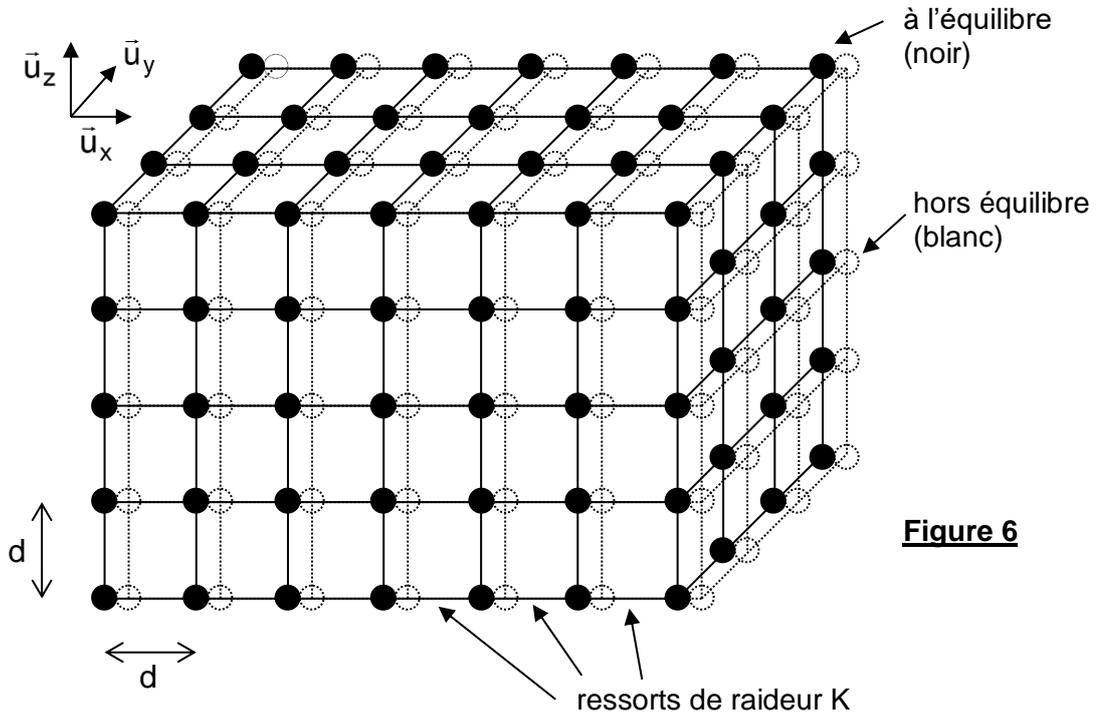


Figure 6

Une onde ultrasonore plane longitudinale se propage selon \vec{u}_x et fait osciller simultanément tous les atomes d'un plan d'onde si bien que les rangées parallèles au vecteur \vec{u}_x vibrent toutes de la même manière. Le raisonnement se fera alors sur une seule chaîne d'atomes identiques et équidistants, atomes repérés sur la chaîne par les indices $q-1$, q et $q+1$ (figure 7). Soit u_q le déplacement de l'atome q d'abscisse x_q telle que : $x_q = q d$.

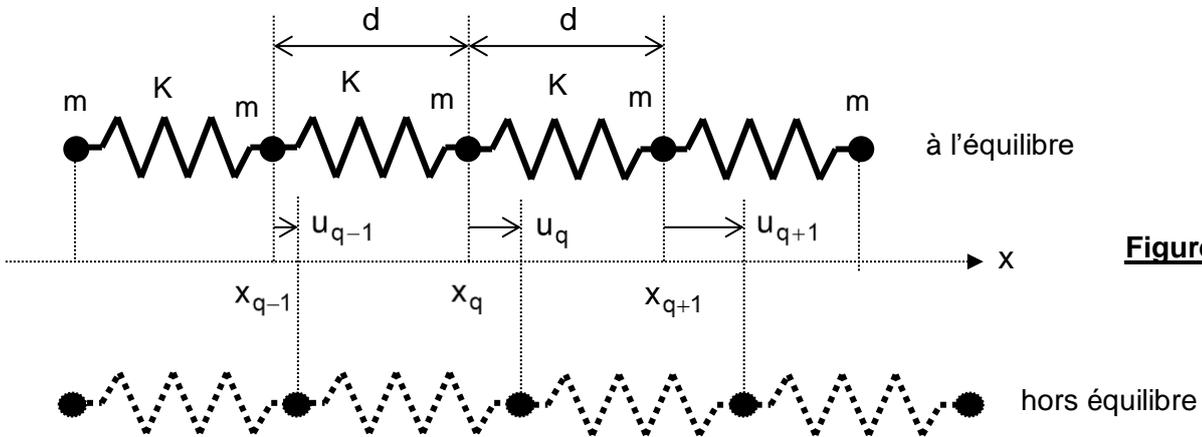


Figure 7

- B1.** En isolant l'atome de rang q , écrire une équation différentielle qui lie u_q , u_{q-1} , u_{q+1} , leurs dérivées éventuelles par rapport au temps et $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.
- B2.** A quelle condition sur ω et k une onde du type $u_q(t) = A \cos(\omega t - k q d)$ peut-elle se propager le long de la barre ?
Mettre en évidence une pulsation de coupure $\omega_c = 2\pi f_c$, au-delà de laquelle la barre ne peut plus propager une onde sinusoïdale d'amplitude constante.

L'acier est assimilé à du fer de masse molaire $M = 56 \text{ g.mol}^{-1}$, les atomes sont distants de $d = 228 \text{ pm}$ et la constante d'Avogadro vaut $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. On rappelle que $Y = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$.

Calculer ainsi les valeurs de K , ω_c et f_c .

En utilisant une approximation de milieu continu, il est possible d'écrire : $u_q(t) = u(x, t)|_{x=qd}$, c'est-à-dire $u_q(t) = u(qd, t)$; et de la même façon, $u_{q+1}(t) = u(x, t)|_{x=(q+1)d}$, $u_{q-1}(t) = u(x, t)|_{x=(q-1)d}$.

- B3.** Grâce à des développements de Taylor, montrer que le déplacement $u(x, t)$ satisfait à une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Exprimer alors la vitesse de propagation V de l'onde en fonction de la masse volumique ρ du matériau et de son module d'Young Y .
Donner la forme générale de la solution de cette équation (avec 2 ondes planes progressives). Qu'est-ce qu'une onde progressive ?
Application numérique : calculer la vitesse V de l'onde sonore dans la barre d'acier.

Une onde $u(x, t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right]$, de pulsation $\omega = 2\pi f$, se propage dans une barre d'acier de mêmes caractéristiques, supposée maintenant de longueur infinie.

- B4.** Exprimer les énergies cinétiques $\delta \mathcal{E}_C$ et potentielles $\delta \mathcal{E}_P$ emmagasinées par une tranche de longueur dx de la barre (considérer un ressort équivalent à cette tranche), puis comparer leurs valeurs respectives.
Déterminer la contrainte de traction $\sigma(x, t)$ subie par l'acier en tout point de la barre.

Quelle équation aux dérivées partielles lie $\sigma(x, t)$ au champ des vitesses $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v(x, t)$ pour l'onde progressive considérée ? En utilisant la notation complexe, en déduire une relation entre σ et v .

- B5.** Montrer que la puissance \mathcal{P} transportée par cette onde par unité de surface s'écrit : $\mathcal{P} = -\sigma(x, t) v(x, t)$.
En déduire sa valeur moyenne dans le temps $\langle \mathcal{P} \rangle$.
Calculer l'énergie totale emmagasinée par unité de longueur et la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$, pour une amplitude $A = 10 \text{ nm}$, une section $S = 5,0 \text{ cm}^2$ et une fréquence $f = 1,0 \text{ MHz}$.

Lorsqu'une onde acoustique longitudinale passe d'un milieu noté 1 (masse volumique ρ_1 et vitesse V_1) pour $x < 0$, à un milieu noté 2 (masse volumique ρ_2 et vitesse V_2) pour $x > 0$, les coefficients énergétiques de réflexion R et de transmission T valent :

$$R = \left(\frac{\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = 1 - R.$$

- B6.** Calculer les coefficients R et T pour le passage acier-air, sachant que pour l'air à 20°C : $\rho_a = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ et $V_a = 330 \text{ m.s}^{-1}$. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

C / FREQUENCES PROPRES D'UNE BARRE

Il sera admis dans la suite que la barre de longueur L (figure 5) est le siège d'ondes acoustiques stationnaires longitudinales de petite amplitude, de sorte que l'équation de propagation établie à la question B3 traduit bien les phénomènes mis en jeu. Il sera admis que la solution, pour le déplacement, s'écrit dans ce cas

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) g_i(t), \quad \text{avec :} \quad f_i(x) = A_i \cos(k_i x) + B_i \sin(k_i x) \quad \text{et} \quad g_i(t) = C_i \cos(\omega_i t) + D_i \sin(\omega_i t).$$

- C1.** Comment la solution $u_i(x, t) = f_i(x) g_i(t)$, pour i fixé, s'appelle-t-elle ? Quelle est sa définition ?
Quelle relation (R_1) lie k_i et ω_i ?

La barre est fixée en $x = 0$ et libre en $x = L$.

- C2.** Quelles sont les conditions limites sur $\sigma(x, t)$ et sur $u(x, t)$?
Donner les trois premières solutions particulières $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$, d'amplitudes respectives U_0 , U_1 et U_2 en fonction de $\omega_0 = \frac{\pi V}{2L}$.

Dessiner les graphes correspondants de $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ (pour x variant de 0 à L).

Préciser les points P où la contrainte $\sigma(x,t)$ est maximale.

D / REGIME FORCE SINUSOIDAL

La barre est libre en $x = L$, tandis qu'à l'extrémité $x = 0$, un vibreur impose à la barre un déplacement sinusoïdal de la forme : $u(0,t) = A_0 \cos(\omega t)$.

D1. En cherchant des solutions du type $u(x,t) = f(x) \cos(\omega t)$, établir l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$.

Exprimer la solution sous la forme $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$. Préciser les valeurs de A , B et k .

D2. Montrer que certaines fréquences conduisent à un phénomène de résonance d'amplitude. A quoi ces fréquences correspondent-elles ?

Expliquer comment à partir d'un vibreur et d'un accéléromètre, il est possible de trouver expérimentalement la valeur du module d'Young de la barre.

Pour la barre d'acier considérée, les trois premières fréquences de résonance ont été évaluées à 2655 Hz, 7965 Hz et 13275 Hz. La longueur est connue au centième de millimètre près, les fréquences sont déterminées au hertz près et la masse volumique au kg.m^{-3} près.

D3. En déduire la valeur du module d'Young de la barre et l'incertitude relative sur cette détermination.

Problème n°2 : Agreg interne 2005

On se propose d'étudier dans ce problème différents modes de transfert thermique dans une carte électronique, modélisée (figure 5) par un conducteur parallélépipédique d'épaisseur faible e , de longueur L , et de largeur a . On note μ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique, et c sa capacité thermique massique.

La longueur L est suffisamment grande pour que l'on adopte dans un premier temps une modélisation unidimensionnelle des transferts thermiques :

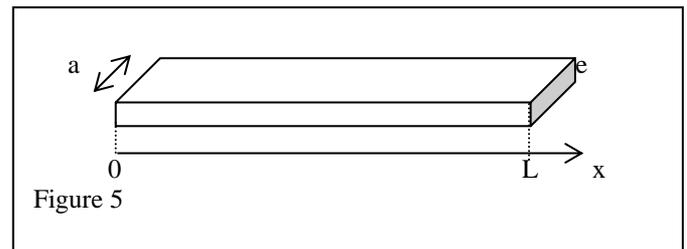


Figure 5

il n'y a pas de perte thermique par convection sur les surfaces latérales.

On note donc $T(x,t)$ la température le long de la plaque à l'instant t . On néglige la dilatation.

1. Equation de la chaleur

Le vecteur densité de courant thermique suit ici la loi de Fourier : $\vec{j}_Q(x,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x,t)$

1.1. Déterminer l'unité S.I. de λ .

1.2. Effectuer un bilan d'énergie sur un système élémentaire contenu entre les abscisses x et $x + dx$ de la plaque, et en déduire une relation entre $\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

1.3. En déduire l'équation aux dérivées partielles qui régit $T(x,t)$, connue sous le nom d'équation de la chaleur :

$$D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}; D \text{ est la diffusivité thermique. Déterminer l'expression de } D \text{ et son unité.}$$

2. Contact avec deux sources de chaleur idéales

On suppose ici que la plaque conductrice est en contact à son extrémité $x = 0$ avec un thermostat de température constante et uniforme T_0 ; de même en $x = L$ avec un thermostat de température T_a . On se place de plus en régime permanent.

2.1. Déterminer la loi de température $T(x)$ le long de la plaque, et le flux thermique Φ à travers la plaque.

2.2. En développant clairement l'analogie thermo-électrique, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} de la plaque. Donner son unité.

3. Transfert conducto-convectif

Une surface S à la température T , en contact avec de l'air à la température T_a échange par conducto-convection avec celui-ci une puissance thermique P_C (sortant algébriquement de la surface S) : $P_C = h \cdot S \cdot (T - T_a)$.

3.1 Quelle est l'unité de h ? Montrer que cet échange conducto-convectif est décrit par une résistance thermique de conducto-convection R_C dont on donnera l'expression.

3.2. On reprend les mêmes hypothèses qu'en 2.) pour la carte électronique ($e \ll a$) et on tient compte de ces échanges conducto-convectifs supplémentaires sur la surface latérale, mais on suppose encore que $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_a$.

□ On pose $\delta^2 = \frac{\lambda e}{2h}$. Donner l'unité S.I. de δ .

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(x) = [T(x) - T_a]$ en régime permanent.
- En déduire la nouvelle répartition de température $T(x)$ (à l'aide de L , δ , T_a , T_0 et T_1).
- Cas particulier si $L \gg \delta$?

4. Application : comportement thermique d'un transistor de puissance

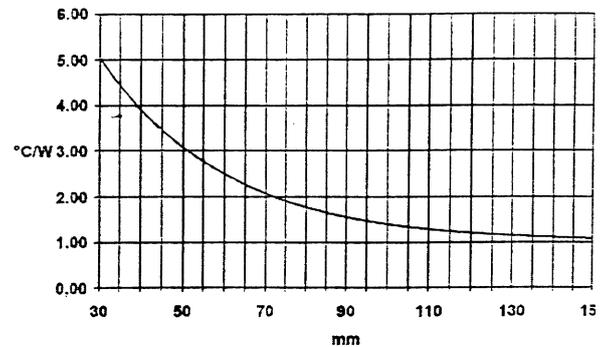
Afin d'optimiser les performances d'un transistor de puissance, il est important de maintenir sa température de fonctionnement dans des limites raisonnables. On choisit pour cela d'utiliser un radiateur, fixé au boîtier, afin d'augmenter les transferts thermiques avec l'air extérieur. Le but de cette question est de choisir le radiateur le plus adapté aux conditions d'utilisation. On note Φ le flux (ou puissance) thermique que doit dissiper le transistor de puissance en régime permanent. Le contact thermique entre le transistor et le radiateur n'étant pas parfait on note R la résistance thermique de cet interface transistor-radiateur. Le radiateur, métallique, est de température quasiment uniforme, T_R . On note R_{rad} la résistance thermique due aux échanges conducto-convectifs radiateur-air. Les températures de l'air ambiant et du transistor sont respectivement T_a et T (supposée uniforme).

4.1. Déterminer l'expression de R_{rad} , qui permet d'évacuer en régime permanent le flux Φ (en fonction de R , T , T_a et Φ).

4.2. Le catalogue de composants d'un fournisseur donne la courbe suivante (figure 7) exprimant l'évolution de la résistance thermique (exprimée en $^{\circ}\text{C}\cdot\text{W}^{-1}$) des radiateurs disponibles en fonction de leur longueur (exprimée en mm). Déterminer la dimension utile du radiateur que l'on doit commander.

AN : $\Phi = 40 \text{ W}$; $T_a = 20^{\circ}\text{C}$; $T = 140^{\circ}\text{C}$; $R = 0,50^{\circ}\text{C}\cdot\text{W}^{-1}$

Figure 7 (en abscisse : longueur en mm)



5. Analyse en régime transitoire quasi-stationnaire

On tient compte maintenant des capacités thermiques respectives C et C_R du transistor et du radiateur.

5.1. Ecrire les équations différentielles qui régissent l'évolution de $T(t)$ et $T_R(t)$.

5.2. Justifier soigneusement que l'on puisse décrire le système thermique étudié par le circuit électrique équivalent de la figure 8 ; pour cela indiquer clairement les équivalents thermiques correspondants des divers éléments électriques introduits.

Dans la suite du problème on utilise la notation complexe.

5.3. Déterminer la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{(T - T_a)}{\Phi}$$

5.4. On se place dans l'approximation $R R_{rad} C C_R \omega^2 \ll 1$. En déduire l'ordre de grandeur de la constante de temps caractéristique de l'évolution temporelle de la température $T(t)$ du transistor ;

$C = 100 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$; $C_R = 200 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.

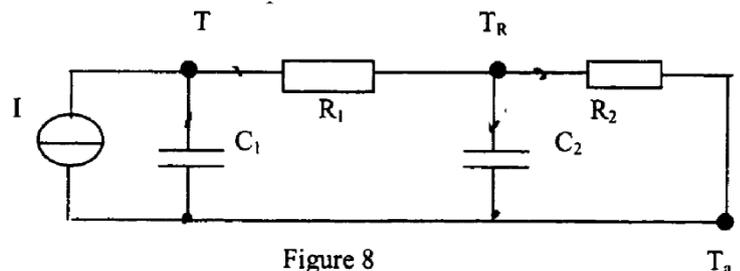


Figure 8

Pb n°3 : chimie Mines PSI 2018

Ont été superposés ci-après les diagrammes potentiel-pH du manganèse (traits fins) et de l'éthanol (traits épais).

Conventions de tracé :

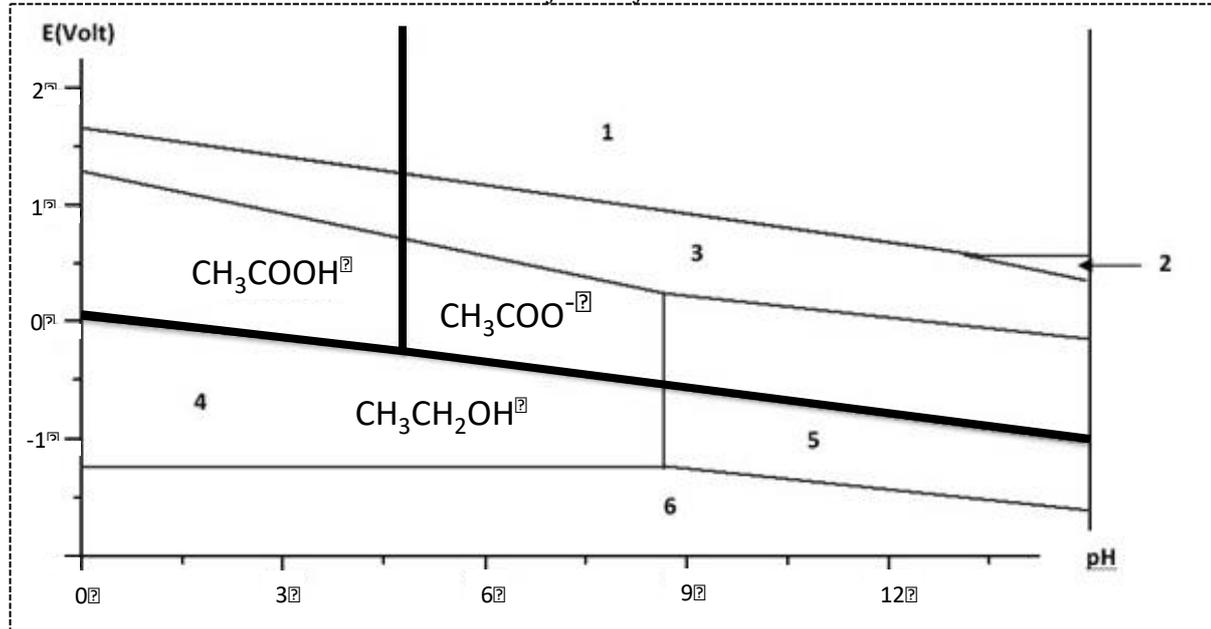
- Concentration totale en espèce dissoute : $C = 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
- On considérera qu'il y a égalité des concentrations aux frontières séparant deux espèces en solution.

1- Associer aux différents domaines du diagramme potentiel-pH de l'élément manganèse les espèces solides Mn, MnO_2 et $\text{Mn}(\text{OH})_2$ ainsi que les ions en solution Mn^{2+} , MnO_4^- et MnO_4^{2-} . Justifier. On précisera pour chaque espèce du manganèse son degré d'oxydation.

2- Déterminer l'équation de la frontière verticale séparant l'espèce 4 de l'espèce 5.

3- Donner (en justifiant) l'équation de la frontière verticale séparant CH_3COOH et CH_3COO^- ainsi que celle de la frontière séparant CH_3COOH et $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

4- En utilisant le graphique, déterminer le potentiel standard du couple $\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}$.



On souhaite doser l'éthanol contenu dans un flacon étiqueté « équivalent biocarburant ». Le protocole est le suivant.

1^{ère} étape : Extraction de l'éthanol du mélange initial

Placer le biocarburant dans une ampoule à décanter, introduire 20 mL d'eau distillée, agiter et laisser décanter. Récupérer la phase aqueuse. Renouveler cette opération 2 fois. Mélanger les 3 phases aqueuses obtenues dans une fiole jaugée de 100 mL. Compléter jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée ; on obtient ainsi la solution S_1 de concentration molaire C_1 en éthanol. Cette solution contient a priori tout l'éthanol provenant du biocarburant.

2^{ème} étape : Préparation de la solution à titrer

La solution S_1 étant trop concentrée, il est nécessaire de réaliser une dilution. On veut obtenir 50 mL de solution S_2 de concentration $C_2 = C_1/10$.

3^{ème} étape : Oxydation de l'éthanol

Dans un erlenmeyer, introduire : précisément $V_3 = 100$ mL de solution de permanganate de potassium de concentration $C_3 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, un volume $V_2 = 2,00$ mL de S_2 prélevé à la pipette jaugée, environ 2 mL d'acide sulfurique concentré manipulé avec précaution. Boucher l'erlenmeyer puis le fixer dans un cristalliseur rempli d'eau chaude et laisser pendant 20 à 30 minutes.

4^{ème} étape : Dosage de l'excès d'ions MnO_4^- dans la solution

Doser le contenu de l'erlenmeyer par une solution contenant des ions Fe^{2+} de concentration $C_4 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Noter le volume V_E versé à l'équivalence. Le titrage doit être réalisé suffisamment lentement sur la fin pour dissoudre le précipité brun de MnO_2 qui se forme pendant la réaction.

- 5- Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu entre l'éthanol et MnO_4^- en milieu acide.
- 6- Ecrire l'équation de la réaction de dosage entre Fe^{2+} et MnO_4^- en milieu acide.
- 7- Pourquoi ne dose-t-on pas directement l'éthanol par MnO_4^- ?
- 8- Sachant que $V_E = 10,0$ mL, calculer la quantité d'éthanol n_2 contenue dans le volume V_2 de la solution S_2 . En déduire la concentration C_1 en éthanol de la solution S_1 .
- 9- A l'aide du diagramme potentiel-pH, expliquer pourquoi on doit rajouter de l'acide sulfurique concentré dans le mélange pour réaliser la 3^{ème} étape. Comment peut-on s'assurer que la réaction d'oxydation de l'éthanol par les ions permanganate est bien possible grâce à ce diagramme ?

Numéros atomiques : $Z(\text{Mn})=25$, $Z(\text{Rh})=45$

Constante de Nernst à 298 K : $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06V$

$\text{pK}_s(\text{Mn}(\text{OH})_2) = 12,7$ à 25°C

Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau à 25°C : $K_e = 10^{-14}$

$\text{pK}_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$ à 25°C

Potentiels redox standards à pH = 0 et à 25°C :

$E^\circ(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) = 0,037 \text{ V}$

$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$

$E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$