

Calculatrice interdite

On prendra  $\sqrt{10} = 3,2$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-11}$  S.I.  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

**Problème n°1 : e3a PSI 2005 COMMUNICATIONS SOUS-MARINES PAR ONDES ACOUSTIQUES**

Les communications strictement sous-marines sont effectuées par ondes acoustiques ultrasonores, à l'aide d'un SONAR (SOund Navigation And Ranging) permettant de détecter des cibles ou des obstacles, et d'estimer des paramètres tels que distance, vitesse ou gisement. Son principe de fonctionnement est le même que celui d'un radar : émission d'une onde acoustique qui est réfléchiée par la cible et captée par le système de réception. Les longueurs d'onde généralement utilisées en sonar vont de 1,5 mm à 1,5 m. Ces dispositifs peuvent être actifs (émetteur et récepteur) ou passifs (détection seule des émissions propres des cibles). Le signal ultrasonore est généré par un transducteur piézoélectrique qui transforme une impulsion électrique en vibration mécanique (effet réciproque) ; ce transducteur peut donc être employé comme émetteur et récepteur.

**A / ONDE ULTRASONORE ET PROPAGATION**

Considérons un milieu fluide homogène initialement au repos et qui, en l'absence de toute perturbation, possède une masse volumique  $\mu_0$  à la pression  $P_0$  et à la température  $T_0$ . Son coefficient de compressibilité isentropique est noté  $\chi_s$ .

Le passage d'une onde acoustique longitudinale plane, se propageant suivant une direction (par exemple Ox), perturbe cet équilibre. En un point  $M(x)$  à l'instant  $t$ , seront notées  $P(x,t)$  la pression,  $\mu(x,t)$  la masse volumique et  $\vec{v}(x,t) = v(x,t) \vec{u}_x$  la vitesse de déplacement longitudinal du milieu ( $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire de l'axe Ox). Le fluide étudié est considéré comme non visqueux ; toute force de frottement et tout échange thermique, ainsi que l'action de la pesanteur seront négligés.

**A1\*a.** Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour une particule de fluide en utilisant le champ des vitesses. En expliquant bien la démarche, en déduire la relation entre  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $v$  et  $\mu$  pour l'écoulement étudié (relation R1).

**A1\*b.** Écrire l'équation locale de conservation de la masse ; en déduire la relation entre  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ ,  $v$  et  $\mu$  (relation R2).

**A1\*c.** Exprimer le coefficient  $\chi_s = -\frac{1}{v} \left[ \frac{\partial v}{\partial P} \right]_s$  en fonction de  $\mu$  et de l'une de ses dérivées partielles (relation R3).

Les mouvements étant considérés de faible amplitude, on supposera que la vitesse  $v(x,t)$  de déplacement des particules de fluide, la variation de pression (surpression ou pression acoustique)  $\tilde{p}(x,t) = P(x,t) - P_0$ , de même que la variation de masse volumique  $\tilde{\mu}(x,t) = \mu(x,t) - \mu_0$  sont des infiniment petits du premier ordre.

**A2\*a.** Linéariser les trois relations précédentes ; en déduire les équations aux dérivées partielles de propagation satisfaites par  $v(x,t)$  et par  $\tilde{p}(x,t)$ .

**A2\*b.** En déduire la célérité  $C$  de l'onde acoustique dans le fluide en fonction de  $\chi_s$  et de  $\mu_0$  ; calculer sa valeur pour l'eau, fluide pour lequel  $\mu_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\chi_s = 4,0 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ .

Une onde acoustique plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  se propage (selon la direction Ox) dans un milieu fluide illimité (supposé homogène).

La surpression acoustique ainsi que la vitesse d'une particule fluide pourront s'écrire, en notation complexe :  $\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ , et  $\underline{v}(x,t) = \underline{v}_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ , d'amplitudes respectives  $\tilde{p}_0$  et  $\underline{v}_0$ .

**A3\*a.** Préciser le sens de propagation de l'onde ; écrire la relation de dispersion dans ce milieu et définir le vecteur d'onde  $\vec{k}$  associé.

**A3\*b.** Déterminer la relation entre les amplitudes  $\underline{\tilde{p}}_0$  et  $\underline{v}_0$ . Calculer la valeur de la longueur d'onde  $\lambda$  associée à une onde de fréquence  $f = 50$  kHz qui se propage dans l'eau.

**B / (SUPPRIMÉE)**

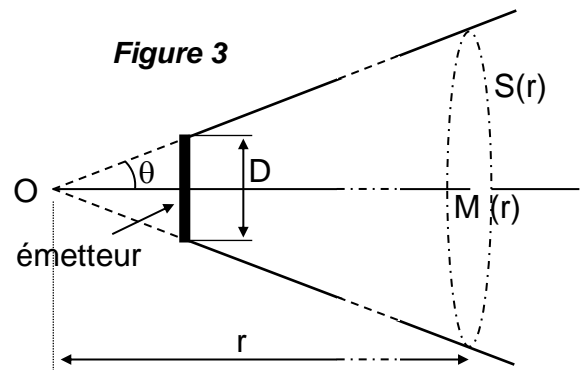
**C / AFFAIBLISSEMENT DES ULTRASONS DANS L'EAU DE MER**

Un émetteur à ultrason  $E$ , plan circulaire de diamètre  $D$ , immergé dans l'eau de mer, émet un faisceau de fréquence  $f$  et d'intensité  $I_E$  à proximité immédiate de l'émetteur. Lors de la propagation dans l'eau avec la célérité  $C$ , le faisceau est diffracté et toute la puissance sonore moyenne  $P_S$  du faisceau se répartit uniformément dans un cône d'axe perpendiculaire au plan de l'émetteur, de demi-angle au sommet  $\theta = C/(2fD)$ , qui demeure petit car les fréquences émises sont élevées (figure 3). La distance entre  $O$  et le disque émetteur ainsi que son diamètre  $D$  sont négligeables par rapport à la distance  $OM = r$ .

Dans l'eau, les ultrasons sont absorbés suivant une loi appelée loi de Beer. Par conséquent, à une distance  $r$  de l'émetteur, la puissance sonore moyenne  $P_S(r)$  pourra s'écrire :

$$P_S(r) = P_E \exp [ -B r ]$$

$P_E$  étant la puissance sonore moyenne émise au niveau de l'émetteur et  $B$ , un coefficient variant comme le carré de la fréquence ( $B = k f^2$ ).



**C1\*a.** L'intensité sonore représente le flux moyen du vecteur densité surfacique de puissance  $\vec{\Pi}_S = \tilde{p} \vec{v}$  à travers une surface unité perpendiculaire au faisceau sonore. Montrer que la puissance sonore moyenne  $P_S$  traversant une surface  $S$  et l'intensité sonore  $I$  sont liées par la relation suivante :  $P_S = S I$ . En déduire l'expression de  $P_E$  en fonction de  $D$  et de  $I_E$ .

**C1\*b.** L'intensité étant supposée constante à travers toute section droite d'aire  $S$  du cône, déterminer l'intensité  $I$  du faisceau ultrasonore dans l'axe de l'émetteur, à la distance  $r$  de  $O$  (exprimer  $I$  en fonction de  $I_E, r, f, k, C$  et  $D$ ).

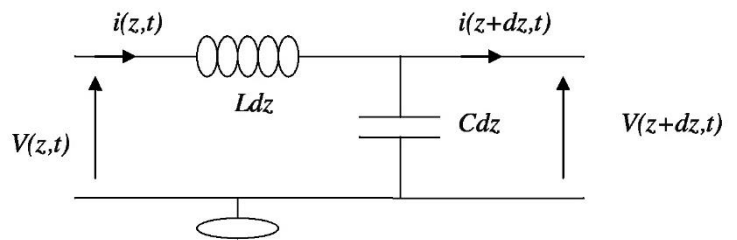
**C2\*a.** En se plaçant à une distance  $r_0$  donnée par rapport à l'émetteur, montrer que  $I(f)$  passe par un extremum  $I_M$  pour une fréquence  $f_M$ , grandeurs que l'on déterminera.

Comment varie cette intensité maximale en fonction de la distance  $r_0$ , puis en fonction de  $D$ , pour une fréquence  $f = f_M$  fixée ? Commenter ces lois de variation.

**Problème n°2** : CCP PSI 2011

**I] Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :**

On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur  $dz$  de la figure 2 où  $L$  et  $C$  désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial. La gaine (fil du bas) est reliée à la masse ( $V_2 = 0$ ), et l'âme (fil du haut), portée au potentiel  $V_1(z, t) = V(z, t)$ , est parcourue par un courant  $i(z, t)$ . On néglige les pertes par effet Joule.



**Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble**

**A] Equation de propagation :**

- 1°) Explicitez le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions  $V(z, t)$  et  $i(z, t)$ .
- 2°) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction  $V(z, t)$  d'une part, puis par la fonction  $i(z, t)$  d'autre part. Quelle forme générale proposez-vous pour la fonction  $V(z, t)$  solution de l'équation aux dérivées partielles ?

**B] Phénomène de réflexion en bout de câble :**

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation  $\omega$ . La ligne est de longueur  $\ell = 100$  m.

On posera  $V(z, t) = V_i(z, t) + V_r(z, t)$

avec  $V_i(z, t) = V_{im} \cdot \cos(\omega t - kz + \varphi)$  et  $V_r(z, t) = V_{rm} \cdot \cos(\omega t + kz + \psi)$ .

A ces ondes réelles, on associe les ondes complexes  $\underline{V}(z, t) = \underline{V}_i(z, t) + \underline{V}_r(z, t)$  avec :

$$\underline{V}_i(z, t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{V}_r(z, t) = \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{où} \quad \underline{V}_{im} = V_{im} e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{V}_{rm} = V_{rm} e^{j\psi}$$

Le câble est relié à un générateur basses fréquences, qui délivre en  $z=0$ , une tension sinusoïdale, de sorte que l'onde totale en  $z = 0$  est sinusoïdale. Le choix de l'origine des temps nous permet de poser :  $V(0, t) = V_0 \cdot \cos(\omega t)$ , à laquelle on associe la forme complexe  $\underline{V}(0, t) = V_0 e^{j\omega t}$ .

- 3°) Le câble est en court-circuit, ou refermé sur une résistance nulle ( $R = 0$ ) à l'extrémité située en  $z = \ell$ .

Expliciter la condition limite  $\underline{V}(\ell, t)$  vérifiée par la fonction  $\underline{V}(z, t)$  en  $z = \ell$ .

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifié par  $\underline{V}_{im}$  et  $\underline{V}_{rm}$ .

Puis exprimer  $\underline{V}_{im}$  et  $\underline{V}_{rm}$  en fonction de  $V_0$ ,  $k$  et  $\ell$ .

- 4°) On définit le coefficient de réflexion  $r$  par :  $r = \frac{\underline{V}_r(\ell, t)}{\underline{V}_i(\ell, t)}$ . Déterminer  $r$  dans le cas du court-circuit ( $R = 0$ ).

- 5°) Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ( $R = +\infty$ ) à son extrémité située en  $z = \ell$ .

Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en  $z = \ell$ .

On admettra dans ce cas que  $r = 1$ .

- 6°) Le câble est maintenant chargé à son extrémité en  $z = \ell$ , par une résistance  $R$ . En admettant que le coefficient de réflexion  $r$  est réel, justifier qu'il existe au moins une valeur critique de  $R$  notée  $R_c$  pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?

Dans la suite du problème, on admettra que  $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

**III Etude expérimentale :**

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en  $z = 0$ , délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carrée », entre les niveaux 0 et  $V_0$  (figure 3). L'autre extrémité du câble est refermée sur une résistance  $R$ .

En plus des phénomènes de propagation et de réflexion éventuelle de l'onde, il y a un léger phénomène d'atténuation. On supposera que la valeur de la résistance  $R$  n'a aucune influence tant sur la durée de propagation que sur l'amortissement dû au chemin parcouru. On admet de plus qu'il n'y a pas de réflexions multiples.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en  $z=0$  la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie. Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de  $R$ . Attention, le zéro vertical n'est pas indiqué sur cette figure 4.

7°) Donner la valeur de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

**A) Cas d'un court-circuit :  $R=0$ .**

L'extrémité  $z = \ell$  est en court-circuit :  $R = 0$ .

8°) On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en  $z = 0$ , par la figure 3.

En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à  $T/4$ , où  $T$  est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées  $V_r(0, t)$  et  $V_{tot}(0, t)$  au point  $z = 0$ .

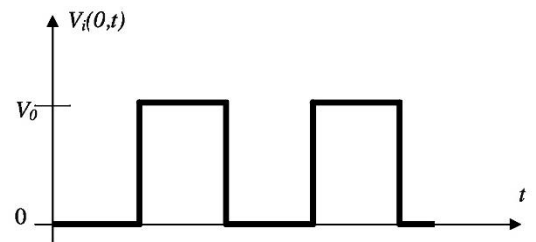
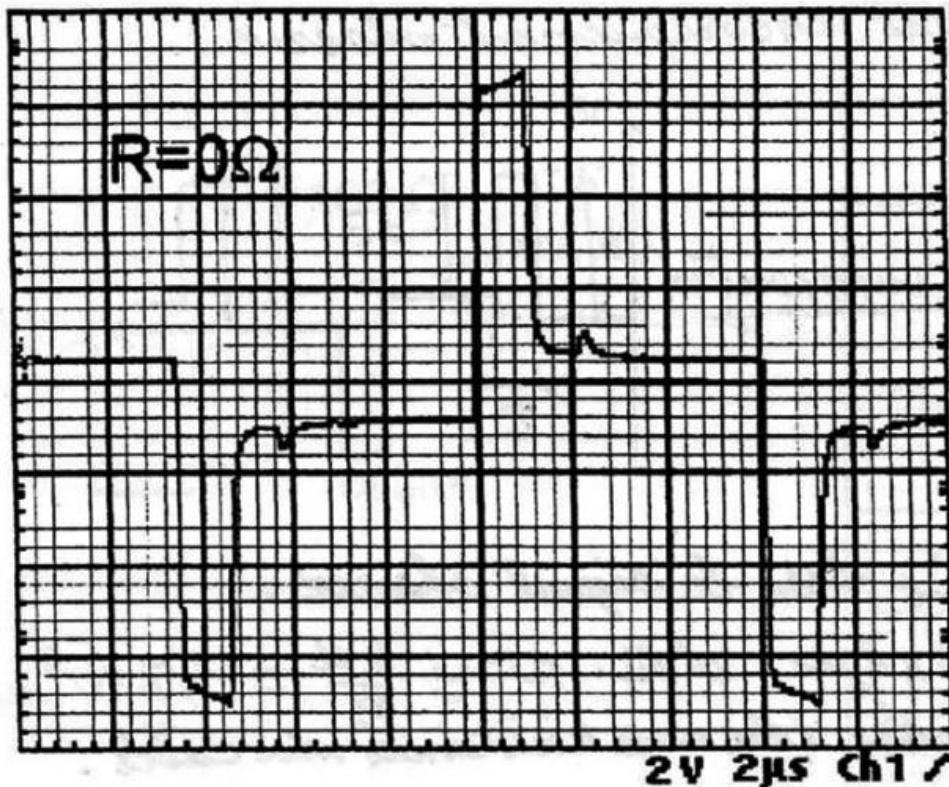


Figure 3 : Onde incidente



L'oscillogramme ci-dessus a été obtenu avec une échelle horizontale de  $2\mu\text{s}$  par carreau (traits épais) et une échelle verticale de  $2\text{V}$  par carreau (traits épais également).

9°) En utilisant l'oscillogramme, déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble. Cette valeur est-elle réaliste ?

10°) On définit le coefficient d'amortissement, noté  $K$ , au cours de la propagation globale, comme le rapport du module de l'amplitude de l'onde réfléchie une fois revenue en  $z = 0$  sur le module de l'amplitude de l'onde incidente émise en  $z = 0$ . Déterminer une valeur approchée de  $K$ .

### **Problème n°3** : D'après Mines Ponts MP 2022

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varie typiquement de 1 jusqu'à  $70\mu\text{m}$ . À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques \dots

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches ( $\vec{v}$ ) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ( $\hat{e}_z$ ). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de  $j$  tel que  $j^2 = -1$ .



**Figure 1** -- Xysticus est une araignée-crabe volante. Hyptiote cavatus est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées Nephila pilipes fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel.

### **Des araignées volantes**

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

1°) En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur  $m_g$  pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut  $E_0 = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude  $z_0 = 60 \text{ km}$  de celui-ci.

2°) Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée  $\sigma$ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de  $360 \text{ kV}$  entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez-vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses  $U$  de l'ordre de  $0,1 \text{ m/s}$  et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur  $L$  que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge  $q$ . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a  $2n$  fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle  $\alpha$  en son sommet  $S$  (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

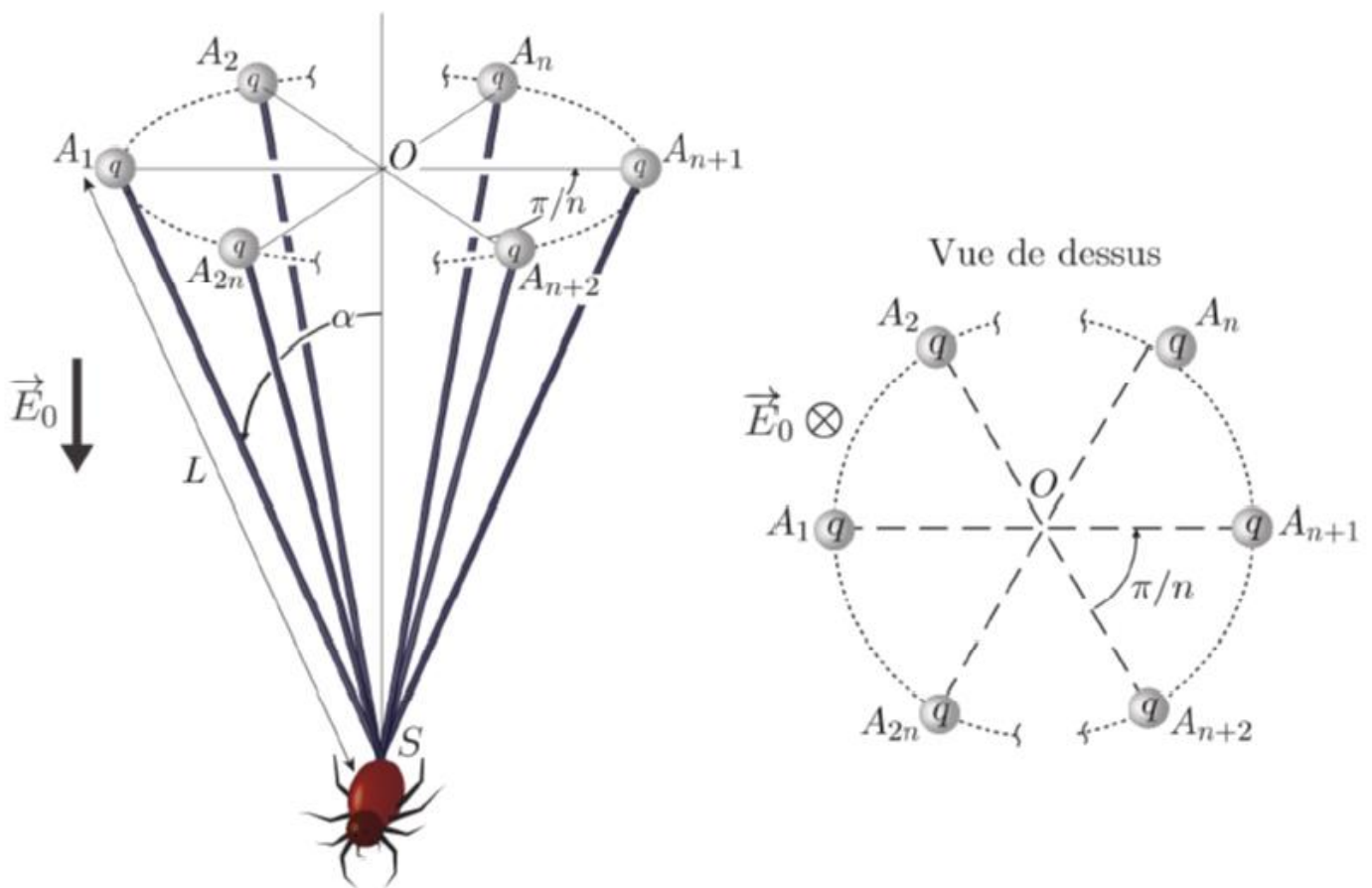


Figure 2 -- Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

3°) Rappeler l'expression du potentiel électrostatique créé en un point  $M$  par une charge ponctuelle  $q$  située en  $O$ .

4°) Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les  $2n - 1$  autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right], p \text{ étant un entier à déterminer.}$$

On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés  $A_k$  et  $A_{k+n}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

5°) Rappeler l'expression de l'énergie d'interaction électrostatique d'une charge  $q$  soumise à un potentiel  $V$ .

6°) En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des  $2n$  charges en l'absence de champ électrique extérieur.

7°) De façon générale, quelle condition doit vérifier une énergie potentielle pour qu'il y ait une position d'équilibre ?

8°) Quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre (s'il n'y a pas de champ électrique en plus de celui créé par les  $2n$  charges, c'est-à-dire si on ne prend pas en compte le potentiel créé par le champ électrique extérieur) ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant  $t$  tous les fils forment le même angle  $\alpha$  avec la verticale (toujours sans prendre en compte le champ électrique extérieur). On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse  $m$  de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que  $S$  est fixe.

9°) Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période  $T$ , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $m$ ,  $L$ ,  $q$  et  $G(n)$ , avec  $G(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$ .

10°) Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre  $\vec{E}_0$  existant au niveau du sol ; On notera  $V(S)$  le potentiel au point  $S$  associé au champ électrique terrestre.  $C$ 'est une constante du problème.

11°) Déterminer l'équation permettant d'obtenir l'expression de l'angle  $\alpha$  à l'équilibre.

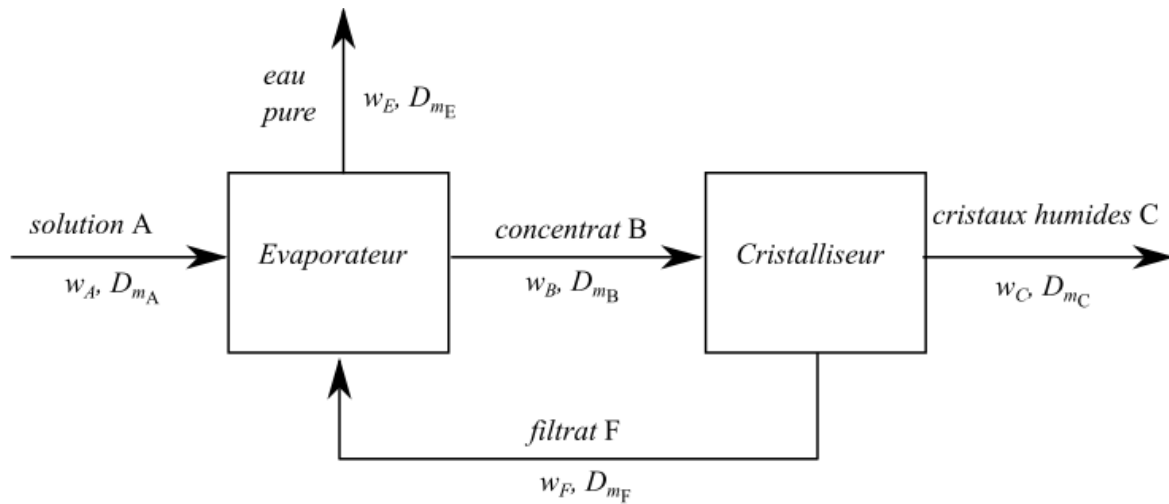
12°) On donne  $q = -1,0 \cdot 10^{-9}$  C. Exprimer la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

## **Problème n°4 : CHIMIE**

**I)** On étudie un procédé industriel de préparation de nitrate de potassium  $\text{KNO}_3$  (qu'on notera A), dont le dispositif est décrit dans le document ci-dessous.

« Un évaporateur est alimenté par 600 kg/h d'une solution de nitrate de potassium à 20% (en masse) dans l'eau, de façon à concentrer cette solution à 50% de  $\text{KNO}_3$ . La solution, récupérée en sortie d'évaporateur, est introduite dans un cristalliseur, où elle est refroidie à 10°C. Une filtration en sortie de cristalliseur permet de séparer le nitrate de potassium solide humide (contenant 4% d'eau en masse) du filtrat, qui est recyclé vers l'évaporateur. Ce filtrat contient 25 grammes de  $\text{KNO}_3$  pour 100 grammes d'eau ».

Dans le schéma ci-dessous, les  $D_{mX}$  représentent les débits massiques (en kg/h) des solutions X, et les  $w_X$  représentent les fractions massiques de  $\text{KNO}_3$  dans les solutions X.



1°) En analysant attentivement le descriptif ci-dessus, déterminer les valeurs numériques de  $D_{mA}$ ,  $w_A$ ,  $w_B$ ,  $w_C$ ,  $w_E$  et  $w_F$ .

2°) Ecrire, pour chaque opération unitaire, l'équation de conservation de la masse globale, et celle de conservation de la masse de  $\text{KNO}_3$ .

3°) En déduire  $D_{mB}$ ,  $D_{mC}$ ,  $D_{mE}$  et  $D_{mF}$ .

**II)** On étudie la réaction avec l'eau (notée E) d'un chlorure d'acyle sulfonique (noté B) menée dans un RPAC de volume  $V$ . Les produits sont un alcool (noté D) et un acide (noté F) :  $B + E = D + F$ .

Le régime est stationnaire. On précise que :

- L'enthalpie standard de réaction est notée  $\Delta_r H^0$  ;
- B est dissous dans l'eau à une concentration  $c_0$  ;
- Le débit volumique de la solution, en entrée comme en sortie, est noté  $D_v$ .
- La solution entre dans le réacteur à  $T_e$  ;
- Le réacteur est adiabatique.

4°) On note  $T_s$  la température de sortie, et  $\alpha$  le taux de conversion de B. À partir d'un bilan d'énergie, établir un lien entre  $D_v$ ,  $c_0$ ,  $\Delta_r H^0$ ,  $\mu_{eau}$ ,  $c_{p\ eau}$ ,  $T_e$ ,  $\alpha$  et  $T_s$ .