

Problème n°1 : e3a PSI 2005

A1*a. Cf cours : pour calculer l'accélération, on utilise l'accélération particulière ; on aboutit alors à :

$$\mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{relation R1})$$

A1*b. Cf cours $\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ Donc $\mu \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ (relation R2)

A1*c. Pour un système fermé, $\delta m = \mu \delta V = Cte$, donc $\frac{d\mu}{\mu} = - \frac{d(\delta V)}{\delta V}$. A entropie constante, $\chi_S = + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$, d'où

$$\chi_S = + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \quad (\text{relation R3})$$

A2*a. (R1) conduit à $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, d'où $\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t \partial x}$

(R2) conduit à $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} = 0$, d'où $\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \tilde{\mu}}{\partial x \partial t}$.

(R3) conduit à $\tilde{\mu} = \mu_0 \chi_S \tilde{p}$, d'où la nouvelle expression de la ligne précédente : $\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial t}$

En supposant \tilde{p} au moins de classe C^2 , et en utilisant le théorème de Schwarz, on obtient : $\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \mu_0 \chi_S \left(- \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)$,

et donc en simplifiant, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ Et on obtient la même pour \tilde{p} .

A2*b. On a reconnu dans la question précédent l'équation de d'Alembert 1D, avec comme célérité, $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$.

$$\text{Numériquement, } C = \frac{1}{\sqrt{1.10^3 \times 4.10^{-10}}} = \frac{\sqrt{10}}{2.10^{-3}} = \boxed{1,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

A3*a. Si $k > 0$, l'onde se propage dans le sens x croissant. La relation de dispersion s'obtient en reportant les

solutions fournies dans l'équation de d'Alembert : $-k^2 v = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) v$, d'où $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$.

Le vecteur d'onde est $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x}$.

A3*b. Avec la relation issue de (R1), $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, on obtient pour une onde harmonique, en notation complexe,

$$\mu_0 j \omega \underline{v}_0 = -(-jk) \underline{\tilde{p}}_0, \text{ d'où } \boxed{\underline{\tilde{p}}_0 = \mu_0 C \underline{v}_0}$$

$$\text{Pour une fréquence } f = 50 \text{ kHz, } \boxed{\lambda = \frac{C}{f}} = \frac{1600}{50000} = \boxed{3,2 \text{ cm}}$$

C Affaiblissement des ultrasons

C1*a. Les puissances considérées ici sont des puissances moyennes dans le temps.

Puisque $P_s = \iint_S \langle \vec{\Pi}_s \rangle \cdot \vec{dS}$, et puisque $I = \langle \vec{\Pi}_s \rangle \cdot \vec{n}$, avec \vec{n} vecteur unitaire indiquant la direction du faisceau sonore, et avec $\vec{dS} = dS \vec{n}$, il vient bien $P_s = \iint_S I dS = IS$, puisqu'on nous dit que P_s se répartit uniformément dans le cône.

$$\text{Au niveau de l'émetteur, on a donc } \boxed{P_E = I_E \frac{\pi D^2}{4}}$$

C1*b. Puisque $P_S = P_E e^{-Br}$ l'intensité sonore à une distance r de O est $I = \frac{P_E e^{-Br}}{S(r)}$. Et la surface $S(r)$ est $S(r) = \pi R^2(r)$, avec $R(r)$ rayon du disque à la distance r de O. Ce rayon vérifie : $\tan \theta = \frac{R(r)}{r}$. Et comme θ est réputé « petit », $\tan \theta \simeq \theta$, d'où $R(r) \simeq \frac{rC}{2fD}$. On en déduit $I = \frac{I_E \frac{\pi D^2}{4} e^{-Br}}{\pi \frac{r^2 C^2}{4 f^2 D^2}} = I_E \frac{D^4 f^2 e^{-Br}}{r^2 C^2} = \boxed{I_E \frac{D^4 f^2 e^{-kf^2 r}}{r^2 C^2}}$

De C2*a. On pose $\beta = kr_0$. I est de la forme : $I = \alpha f^2 e^{-\beta f^2}$, donc $\frac{dI}{df} = \alpha(2f e^{-\beta f^2} - 2\beta f^3 e^{-\beta f^2})$, c'est-à-dire $\frac{dI}{df} = 2\alpha e^{-\beta f^2} (f - \beta f^3)$. Cette dérivée s'annule pour $f = 0$ ou $f = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. C'est la seconde valeur qui correspond au maximum cherché, et donc $f_M = \frac{1}{\sqrt{kr_0}}$, puis $I_M = I_E \frac{D^4 e^{-1}}{kr^3 C^2} = \boxed{I_E \frac{D^4}{kr_0^3 C^2 e}}$.

Quand la fréquence f croît, le faisceau devient plus directif (cône plus fermé, car θ est en $1/f$), mais l'onde s'atténue davantage en se propageant, à cause de $e^{-\beta f^2}$.

I_M étant en D^4 , c'est une fonction croissante de D , donc on a intérêt à prendre un gros disque.

I_M est en $1/r_0^3$, donc la décroissance de l'intensité est plus rapide avec de l'absorption que sans absorption (car alors I décroît en $1/r^2$).

Problème n°2 : CCP PSI 2011

1°) Loi des mailles et loi des nœuds.

On obtient le système habituel : $L \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial V}{\partial z}$ $C \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial z}$.

2°) En utilisant le théorème de Schwarz, on obtient que i et V vérifient l'équation de d'Alembert avec la célérité

$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

Quand on demande la forme générale de $V(z,t)$, la réponse attendue est :

$V(z,t) = f(t-z/c) + g(t+z/c)$. Le premier terme décrit une onde qui se propage sans déformation selon les z croissants, le second une onde qui se propage sans déformation selon les z décroissants.

3°) Les conditions aux limites s'écrivent pour tout t : $V(0,t) = V_0 e^{j\omega t}$ et $V(\ell,t) = 0$ (court-circuit)

On obtient le système d'équations : $V_{im} + V_{rm} = V_0$ et $V_{im} e^{-jk\ell} + V_{rm} e^{jk\ell} = 0$

On résout alors en : $V_{im} = \frac{V_0 e^{jk\ell}}{e^{jk\ell} - e^{-jk\ell}} = \frac{-jV_0 e^{jk\ell}}{2\sin(k\ell)}$ $V_{rm} = \frac{jV_0 e^{-jk\ell}}{2\sin(k\ell)}$.

4°) On calcule maintenant : $r = \frac{V_{rm} e^{jk\ell}}{V_{im} e^{-jk\ell}} = -1$

5°) Dans le cas d'une sortie ouverte, la condition limite demandée est : $i(\ell,t) = 0$ pour tout t .

6°) On peut répondre de deux façons :

- On peut admettre que r est une fonction réelle continue de la variable R , réelle positive. On a vu que $r(0) = -1$. On nous précise que $r(R \rightarrow +\infty) = 1$. On peut donc dire qu'il existe au moins une valeur R_c positive de R pour laquelle $r=0$. On a alors réalisé l'adaptation d'impédance.

- On peut aussi faire des calculs : à partir des équations de couplages, on a $\underline{V}_i = Lc\underline{i}_i = \sqrt{\frac{L}{C}} \underline{i}_i$ et $\underline{V}_r = -Lc\underline{i}_r = -\sqrt{\frac{L}{C}} \underline{i}_r$. La présence de R en bout de ligne impose :

$$\underline{V}_i(\ell, t) + \underline{V}_r(\ell, t) = R [\underline{i}_i(\ell, t) + \underline{i}_r(\ell, t)] = R \sqrt{\frac{C}{L}} [\underline{V}_i(\ell, t) - \underline{V}_r(\ell, t)], \text{ d'où } r = \frac{\underline{V}_r(\ell, t)}{\underline{V}_i(\ell, t)} = \frac{R - \sqrt{\frac{L}{C}}}{R + \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

On trouve bien que $r = 0$ pour $R = R_c$.

7°) La résistance « usuelle » d'un GBF en TP est de 50Ω .

8°) On nous donne $V_i(0, t)$, ce qui correspond à la fonction $f(t)$ donnant la forme de l'onde incidente. S'il n'y avait pas d'atténuation dans la ligne, on aurait en tout z : $V_i(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$. Et le court-circuit en bout de ligne imposerait : $V_r(\ell, t) = -V_i(\ell, t) = -f\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$. Et, du fait du temps de vol nécessaire pour revenir à l'entrée de la ligne, on a $V_r(0, t) = -f\left(t - \frac{2\ell}{c}\right)$.

Pour le démontrer, on peut dire que l'onde réfléchie étant « régressive », il existe une fonction g telle que $V_r(z, t) = g\left(t + \frac{z}{c}\right)$.

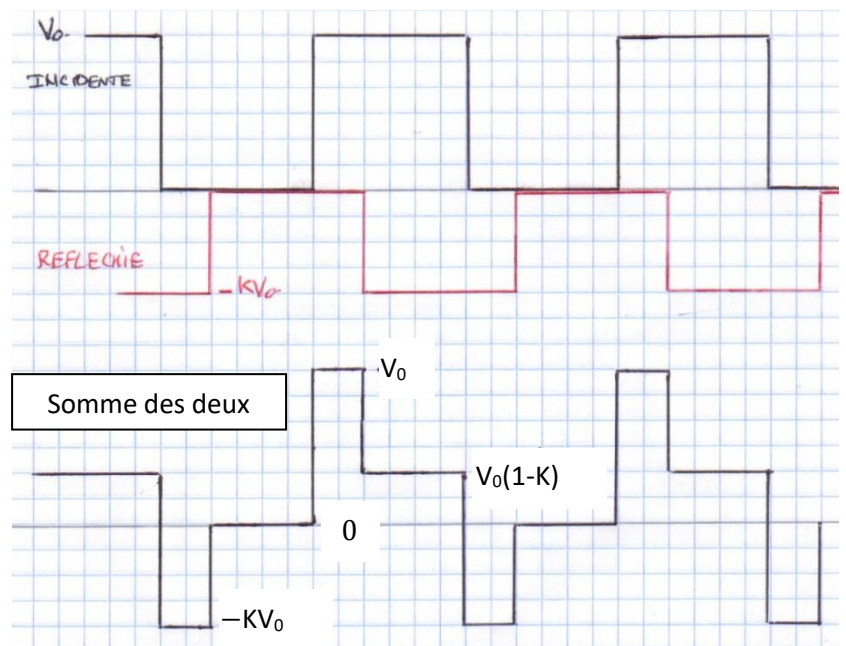
Toujours en supposant l'absence d'atténuation, on aurait

$$g\left(t + \frac{\ell}{c}\right) = -f\left(t - \frac{\ell}{c}\right),$$

$$\text{d'où } g(t) = -f\left(t - \frac{2\ell}{c}\right),$$

$$\text{puis } V_r(z, t) = -f\left(t + \frac{z-2\ell}{c}\right).$$

A l'entrée de la ligne, là où est l'oscilloscope, on verrait passer au cours du temps : $V_r(0, t) = -f\left(t - \frac{2\ell}{c}\right)$.



Ainsi par rapport à la forme correspondant à l'onde incidente que l'on voit passer en $z = 0$ grâce à l'oscilloscope, la forme de l'onde réfléchie s'en déduirait en faisant une symétrie par rapport à l'axe horizontal (à cause du signe $-$ de $(-f)$), et avec un retard temporel correspondant à la durée de l'aller-retour : (d'où le $t - \frac{2\ell}{c}$). Ce retard est réputé inférieur à $T/4$.

Il ne reste plus qu'à ajouter un facteur multiplicatif dû à l'amortissement :

l'onde réfléchie ne descend pas à $-V_0$, mais seulement à $-KV_0$, et $V_r(0, t) = -Kf\left(t - \frac{2\ell}{c}\right)$

On obtient globalement (cf plus haut) la forme expérimentale proposée. On remarque que sur les figures de l'énoncé, il manque l'information correspondant au « zéro vertical » sur les oscillogrammes.

9°) L'aller-retour fait 200m et provoque un retard que l'on peut lire en mesurant la largeur des pics de la première figure de l'énoncé. Ce retard est d'environ 3 petits carreaux (sur la figure de l'énoncé), un grand carreau

correspondant à 5 petits et à $2\mu\text{s}$. Le retard est donc de $1,2\mu\text{s}$, ce qui correspond à une vitesse de propagation de $1,7 \cdot 10^8 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. C'est réaliste, car un peu inférieur à la célérité de la lumière dans le vide.

10°) Les graduations sont peu lisibles ... J'estime KV_0 à 15 petits carreaux, et V_0 à 18 petits carreaux.

Donc $K \approx 0,83$, arrondi à 0,8. On constate sur les différents graphes que V_0 ne fait pas toujours 18 petits carreaux, mais nous garderons cette valeur dans les calculs.

Problème n°3 : D'après Mines Ponts MP 2022

1°) On modélise grossièrement une araignée par une boule de diamètre d , dont la masse volumique est égale à celle de l'eau : $m_g \approx \mu_{eau} \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} \approx \mu_{eau} \frac{d^3}{2}$

A.N m_g varie de 4 mg pour $d = 2 \text{ mm}$ à $0,50 \text{ g}$ pour $d = 10 \text{ mm}$.

2°) Le champ électrique en tout point M à l'intérieur du condensateur plan formé par la surface de la Terre et l'ionosphère vaut, en appliquant le théorème de superposition : $E_0 = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$. Et puisque le champ est dirigé vers le sol, la

charge portée par le sol est négative et vaut $\sigma = -E_0 \epsilon_0 = -12 \cdot 10^{-10} \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$.

À l'intérieur d'un condensateur plan, le champ est uniforme donc $U = z_0 E_0 = 7,2 \cdot 10^6 \text{V}$.

Il y a donc un rapport 20 par rapport à la tension mesurée, de valeur 360 kV.

Le modèle de condensateur plan, avec un champ électrique uniforme n'est donc pas correct. Il faudrait un modèle de condensateur sphérique.

3°) Le potentiel électrostatique créé en un point M par une charge ponctuelle q située en O est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM}$$

4°) Soit A_j la position de la charge j dont on cherche le potentiel V créé par les $2n - 1$ autres charges et soit $V_i(A_j)$ le potentiel créé en A_j par la charge i .

D'après le théorème de superposition, et en prenant par exemple $j = 1$, on a :

$$V = \sum_{i=2}^{2n-1} V_i(A_1) = \sum_{i=2}^{2n} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{i1}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_1 A_{1+n}} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_1 A_i}$$

où l'on a tenu compte de la répartition deux à deux symétrique des charges $i \neq 1$ par rapport à l'axe $A_1 A_{1+n}$.

D'après la figure 2, toutes les charges sont situées à une même distance radiale $r = L \sin \alpha$ du centre O .

Les triangles $OA_1 A_i$ étant isocèles, on a $A_1 A_i = 2r \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right) = 2L \sin \alpha \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)$.

De plus, $A_1 A_{1+n} = 2r = 2L \sin \alpha$.

$$\text{Il vient } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times 2L \sin \alpha} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \times 2L \sin \alpha \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left[1 + \sum_{i=2}^n \frac{2}{\sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)} \right]$$

En remplaçant $i - 1$ par k , on obtient bien la formule de l'énoncé, avec $p = 8$:

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right]$$

5°) L'expression de l'énergie d'interaction électrostatique d'une charge q soumise à un potentiel V est $E_p = qV$.

6°) Ici, toutes les charges sont identiques et les expressions du potentiel V créé par les $2n - 1$ autres charges sont également toutes identiques, par symétrie.

On a donc $U(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} q_j V = nqV$, donc $U(\alpha) = \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right]$

N.B. : Le facteur $\frac{1}{2}$ est nécessaire pour ne pas compter deux fois l'interaction entre les charges.

7°) De façon générale, une position d'équilibre correspond à un **extrémum d'énergie potentielle**. Et c'est un minimum pour une position stable.

8°) On cherche les valeurs de α qui vérifient $\frac{dU}{d\alpha} = 0$, c'est-à-dire $\frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right] \left(\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = 0$.

Ainsi, le position d'équilibre correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Et c'est bien un minimum de U , parce que U devient très grand quand $\sin \alpha$ tend vers 0, c'est-à-dire quand α tend vers 0 ou π .

On pouvait se douter de cette valeur de α car c'est elle qui permet d'avoir le plus grand éloignement entre les charges, qui se repoussent car elles sont toutes de même signe.

9°) Compte tenu des hypothèses simplificatrices, l'énergie mécanique de l'ensemble des fils est la somme de l'énergie cinétique et de U : $E_m = U + E_c$. Et comme les fils sont supposés avoir tous le même mouvement, et que chaque masse m , située à une distance $\frac{L}{2}$ de S , est en rotation autour de S , avec une vitesse de valeur $\frac{L}{2} \dot{\alpha}$, on obtient

$$E_m = U + 2n \times \frac{1}{2} m \frac{L^2}{4} \dot{\alpha}^2 = \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right] + \frac{1}{4} nmL^2 \dot{\alpha}^2.$$

Puisqu'il n'y a pas de travaux de forces non conservatives, le théorème de l'énergie mécanique appliqué à l'ensemble des $2n$ masses, dans le référentiel de l'araignée, supposé galiléen, s'écrit $E_m = Cte$, d'où $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Il vient : $\frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} \right] \left(\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{\alpha} + \frac{1}{2} nmL^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = 0$.

L'une des solutions est l'équilibre ($\dot{\alpha} = 0$), et l'autre donne l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L} G(n) \left(\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + \frac{1}{2} nmL^2 \ddot{\alpha} = 0, \text{ qui se simplifie en } \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} G(n) \left(\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + mL^2 \ddot{\alpha} = 0$$

Dans le voisinage de la position d'équilibre, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \epsilon$, avec $|\epsilon| \ll \frac{\pi}{2}$. Donc $\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin \epsilon}{\cos^2 \epsilon}$. Et $\ddot{\alpha} = \ddot{\epsilon}$.

A l'ordre 1 en ϵ , $\frac{\sin \epsilon}{\cos^2 \epsilon} = \epsilon$. D'où $\ddot{\epsilon} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mL^3} G(n) \epsilon = 0$ On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique,

dont la pulsation est $\omega_0 = q \sqrt{\frac{G(n)}{4\pi\epsilon_0 mL^3}}$, et la période est $T = \frac{4\pi}{q} \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mL^3}{G(n)}}$.

Pour ce qui est de la stabilité de l'équilibre, on l'a déjà dit à la question précédente : puisqu'elle correspond à un **minimum** d'énergie potentielle, elle est **stable**.

10°) Quand le système est immergé dans le champ électrique terrestre \vec{E}_0 existant au niveau du sol, le potentiel électrostatique comporte un terme supplémentaire V' , et l'énergie électrostatique du système comporte un terme supplémentaire U' :

$$\vec{E}_0 = -E_0 \vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} V' \text{ conduit à } V' = E_0 z + Cte. \text{ Et, en } S, z = 0 \text{ et } V' = V(S), \text{ d'où } V' = E_0 z + V(S).$$

L'énergie électrostatique associée à V' est $U' = 2nqE_0 L \cos \alpha + 2nq V(S)$.

L'énergie électrostatique totale est ainsi : $U_{tot} = \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} G(n) + 2nqE_0 L \cos \alpha + 2nq V(S)$.

11°) L'équation permettant d'obtenir l'expression de l'angle α à l'équilibre est $\frac{dU_{tot}}{d\alpha} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{nq^2}{8\pi\epsilon_0 L} G(n) \left(\frac{-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - 2nqE_0 L \sin \alpha = 0, \text{ d'où } \boxed{\frac{-q}{16\pi\epsilon_0} G(n) \cos \alpha = E_0 L^2 \sin^3 \alpha}.$$

12°) La force extérieure s'exerçant sur l'araignée est $\boxed{\vec{F} = 2nq \vec{E}_0}$. Elle est donc verticale ascendante, puisque $q < 0$.

Pour soulever les plus petites araignées, il faut un nombre de fils tels que la force électrostatique compense le poids, c'est-à-dire $2n|q|E_0 \geq m_g g$, d'où $n \geq \frac{m_g g}{2|q|E_0}$. Numériquement, $n \geq \frac{4 \cdot 10^{-6} \times 10}{2 \times 10^{-9} \times 120} = \boxed{1,7 \cdot 10^2}$.

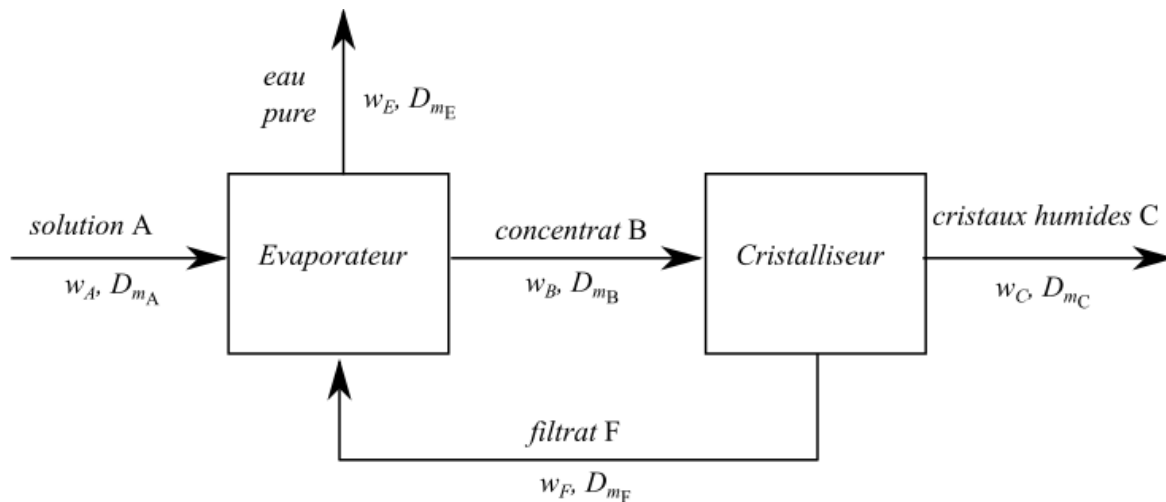
C'est trop élevé. Le modèle doit être perfectible !

Problème n°4 : CHIMIE

I) On étudie un procédé industriel de préparation de nitrate de potassium KNO_3 (qu'on notera A), dont le dispositif est décrit dans le document ci-dessous.

« Un évaporateur est alimenté par 600 kg/h d'une solution de nitrate de potassium à 20% (en masse) dans l'eau, de façon à concentrer cette solution à 50% de KNO_3 . La solution, récupérée en sortie d'évaporateur, est introduite dans un cristalliseur, où elle est refroidie à 10°C . Une filtration en sortie de cristalliseur permet de séparer le nitrate de potassium solide humide (contenant 4% d'eau en masse) du filtrat, qui est recyclé vers l'évaporateur. Ce filtrat contient 25 grammes de KNO_3 pour 100 grammes d'eau ».

Dans le schéma ci-dessous, les D_{mX} représentent les débits massiques (en kg/h) des solutions X, et les w_X représentent les fractions massiques de KNO_3 dans les solutions X.



1°) En analysant attentivement le descriptif ci-dessus, on a immédiatement :

$$\boxed{D_{mA} = 600 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}} \quad \boxed{w_A = 20\%} \quad \boxed{w_B = 50\%} \quad \boxed{w_C = 96\%} \quad \boxed{w_E = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{w_F = \frac{25}{125} = 20\%}.$$

2°) Pour l'évaporateur, l'équation de conservation de la masse globale est : $\boxed{D_{mA} + D_{mF} = D_{mE} + D_{mB}}$ (1)

Pour l'évaporateur, celle de conservation de la masse de KNO_3 est $\boxed{w_A D_{mA} + w_F D_{mF} = w_E D_{mE} + w_B D_{mB}}$ (2)

Pour le cristalliseur, l'équation de conservation de la masse globale est : $\boxed{D_{mB} = D_{mC} + D_{mF}}$ (3)

Pour le cristalliseur, celle de conservation de la masse de KNO_3 est $w_B D_{mB} = w_C D_{mC} + w_F D_{mF}$ (4).

Et comme $w_E = 0$, (2) se simplifie en $w_A D_{mA} + w_F D_{mF} = w_B D_{mB}$ (2).

3°) (2) et (4) donnent $w_A D_{mA} + w_F D_{mF} = w_C D_{mC} + w_F D_{mF}$, d'où $D_{mC} = \frac{w_A}{w_C} D_{mA} = \frac{20}{96} 600 = 1,2 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$.

(1) et (2) donnent $D_{mA} + D_{mF} = D_{mE} + D_{mC} + D_{mF}$, d'où $D_{mA} = D_{mE} + D_{mC}$, puis $D_{mE} = D_{mA} - D_{mC}$.

$$\text{Donc } D_{mE} = D_{mA} \left(1 - \frac{w_A}{w_C}\right) = \frac{76}{96} 600 = 4,8 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

(4) et (3) donnent $D_{mF} = \frac{w_B D_{mB} - w_C D_{mC}}{w_F} = \frac{w_B (D_{mC} + D_{mF}) - w_C D_{mC}}{w_F}$, donc $D_{mF} \left(1 - \frac{w_B}{w_F}\right) = \frac{D_{mC} (w_B - w_C)}{w_F}$,

$$\text{puis } D_{mF} = D_{mC} \frac{(w_B - w_C)}{w_F - w_B} = \frac{w_A (w_B - w_C)}{w_C (w_F - w_B)} D_{mA} = \frac{20 \cdot 46}{96 \cdot 30} 600 \simeq 2,0 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

(3) donne alors $D_{mB} = D_{mC} + D_{mF} = \frac{w_A}{w_C} D_{mA} + \frac{w_A (w_B - w_C)}{w_C (w_F - w_B)} D_{mA}$

$$\text{D'où } D_{mB} = \frac{w_A}{w_C} \left(1 + \frac{(w_B - w_C)}{w_F - w_B}\right) D_{mA} = \frac{20}{96} \left(1 + \frac{46}{30}\right) 600 = \frac{20}{96} \left(\frac{76}{30}\right) 600 \simeq 3,2 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

4°) Le premier principe industriel appliqué entre l'entrée et la sortie du réacteur adiabatique, donne :

$\mu_{eau} D_v dt (h_s - h_e) = 0$, c'est-à-dire, en imaginant 2 étapes fictives (d'abord uniquement la réaction isotherme, puis uniquement le changement de température : $\mu_{eau} D_v c_{peau} (T_s - T_e) + \Delta_r H^0 vV = 0$.

Or, $[B]_s = [B]_e - \frac{vV}{D_v}$, c'est-à-dire $[B]_e (1 - \alpha) = [B]_e - \frac{vV}{D_v}$, donc $vV = D_v \alpha [B]_e = D_v \alpha c_0$.

Il vient $\mu_{eau} D_v c_{peau} (T_s - T_e) + \Delta_r H^0 D_v \alpha c_0 = 0$,

ou plus simplement, $D_v (\mu_{eau} c_{peau} (T_s - T_e) + \Delta_r H^0 \alpha c_0) = 0$.

On en déduit : $T_s = T_e + \frac{-\Delta_r H^0 \alpha c_0}{\mu_{eau} c_{peau}}$.