

CCINP PSI 2019 PhCh :

Q1. Le nombre de Reynolds montrerait que l'écoulement est globalement turbulent, mais la turbulence est surtout localisée derrière la voiture, dans le « sillage ». Le reste est plus laminaire.

Le coefficient C_x dépend de la forme de la voiture, et du nombre de Reynolds.

Q2. Il faudrait préciser que l'auto roule sur le plat ... Admettons cela. Et s'il n'y avait pas de frottements entre les pneus et la route, ce serait dramatique !!!

Pour la puissance annoncée (qui est en fait la puissance maximale), la force propulsive est $F_{prop} = \frac{P}{v}$. Et en appliquant le théorème de la résultante dynamique à la voiture dans le référentiel terrestre supposé galiléen, puis en projetant sur l'axe horizontal du mouvement, $F_{prop} - F_x = 0$, d'où $\frac{P}{v} = \frac{C_x \rho_0 S v^2}{2}$,

puis $v = \left(\frac{2P}{C_x \rho_0 S} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,8 \cdot 10^2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Q3. La consommation est exprimée en volume de carburant par distance parcourue, donc $conso = \frac{Vol}{d}$. Or la puissance développée par le moteur est proportionnelle à la puissance thermique dégagée par la combustion du carburant, elle-même étant le $(-\Delta_r H^0)$ de la réaction multiplié par le débit en carburant (en mol par seconde ou en m^3 par seconde).

Ainsi on peut écrire $P = Cte \times \frac{Vol}{\Delta t}$, d'où $P = Cte \times \frac{Vol}{d} v = Cte \times conso \times v$.

Finalement, $\frac{C_x \rho_0 S v^3}{2} = Cte \times conso \times v$. Donc la consommation est en v^2 .

Q4. L'écoulement étant stationnaire, la masse qui entre dans un volume de contrôle pendant dt est la même que celle qui en sort, donc $dm_1 = dm_2$. De plus, l'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant. Et puisqu'il est parfait, la vitesse est uniforme dans chaque section droite. Ainsi, $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Et comme $S_1 = S_2 = S_e$, $v_1 = v_2$.

Q5. En régime stationnaire, la répartition de masse et de vitesse reste toujours la même dans la portion A'B'CD, donc la quantité de mouvement du fluide qui s'y trouve est toujours la même. Pour le système fermé considéré, la petite variation de la quantité de mouvement, divisée par la petite durée dt associée, est $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{dt} = \rho_0 v_1 S_e (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système fermé choisi, dans le référentiel de la voiture, s'écrit (en négligeant la pesanteur comme demandé) :

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{aileron} \rightarrow \text{air}}(\text{surp})$. D'où $\vec{F}_{\text{aileron} \rightarrow \text{air}}(\text{surp}) = \rho_0 v_1 S_e (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

Q6. D'après le principe des actions réciproques, $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{véhicule}} = -\vec{F}_{\text{aileron} \rightarrow \text{air}}(\text{surp})$. Et en prenant \vec{u}_z vertical ascendant, $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{véhicule}} \cdot (-\vec{u}_z) = +\rho_0 v_1 S_e (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{u}_z = \rho_0 v_1^2 S_e (\sin \beta + \sin \alpha)$

Il est rassurant de constater que cette composante de force verticale descendante est positive : l'air appuie sur l'aileron !

Partie II : Alimentation électrique

Q7. Avec $A = 207$ et $Z = 82$, le noyau de l'atome de plomb contient 82 protons et $207 - 82 = 125$ neutrons.

Q8. On recense le nombre d'oxydation du plomb dans chaque espèce :

Espèce	$\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$	$\text{PbO}_2(\text{s})$	$\text{PbO}(\text{s})$	$\text{HPbO}_2^-(\text{aq})$	$\text{Pb}(\text{s})$	$\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$
Nb d'oxydation de Pb	+II	+IV	+II	+II	0	+8 / 3

Le diagramme est complété ci-contre :

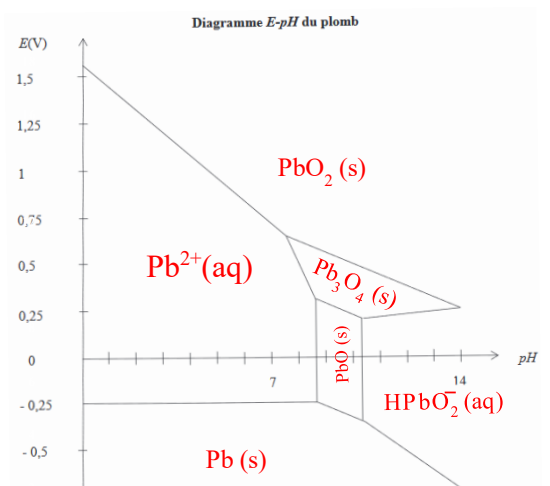
Le nombre d'oxydation du plomb augmente quand on monte sur le diagramme. Pour les 3 espèces de nombre d'oxydation +II, on procède de la façon suivante :

L'oxyde PbO est le « cousin » de l'hydroxyde $\text{Pb}(\text{OH})_2$ car c'est l'espèce déshydratée (une molécule d'eau en moins) associée à l'hydroxyde. Or, on passe de Pb^{2+} à $\text{Pb}(\text{OH})_2$ en ajoutant 2HO^- , ce qui veut dire que l'hydroxyde est plus basique.

Et HPbO_2^- s'obtient en ajoutant HO^- à PbO, donc HPbO_2^- est plus basique que PbO.

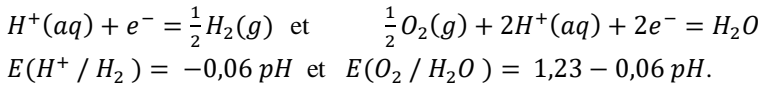
Les zones sont des zones de prédominance pour les solutés (espèces (aq)), et sont des zones d'existence pour les solides (s).

L'oxyde Pb_3O_4 est appelé oxyde mixte car le nombre d'oxydation du plomb n'y est pas entier.



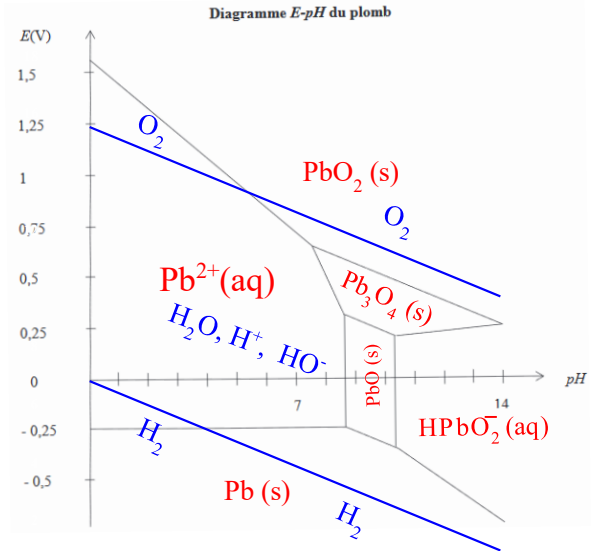
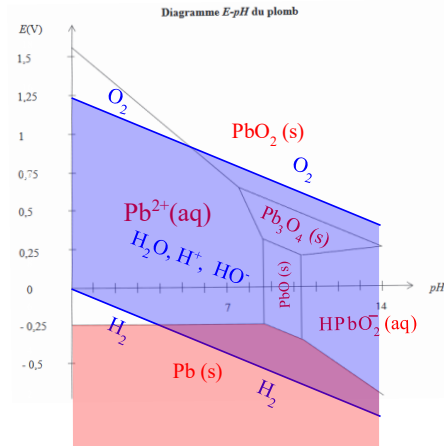
La raison est que les trois atomes de Pb n'y ont pas le même nombre d'oxydation : deux sont au n.o. +III, et un est au n.o. +II, ce qui fait une moyenne de 8/3.

Q9. Les deux couples de l'eau sont classiques :

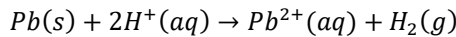


Q10. La superposition des deux diagrammes est ci-contre.

On voit sur ce diagramme qu'à part à pH très acide, il y a chevauchement entre le domaine de stabilité du plomb (s) et la bande de l'eau.

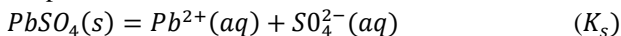


Le plomb est donc stable dans l'eau, aux pH basiques, et instable aux pH très acides. Il se produit alors la réaction :



Q11. On cherche la solubilité du sulfate de plomb $PbSO_4(s)$ dans une solution d'acide sulfurique. Pour cela, on suppose que l'on introduit progressivement du solide $PbSO_4$ dans 1 litre de solution sulfurique, et on s'arrête quand le solide n'arrive plus à se dissoudre. On note s le nombre de moles total de solide ajouté, quand le solide commence à ne plus se dissoudre.

On peut alors faire le bilan de matière suivant :



$$\begin{matrix} s & 0 & c_0 \\ 0^+ & \approx s & \approx c_0 + s \end{matrix}$$

Et comme le précipité existe (infiniment peu, mais existe), on peut écrire la loi d'action des masses :

$$K_s \approx s(c_0 + s), \text{ d'où } s^2 + c_0s - K_s = 0. \quad \Delta = c_0^2 + 4K_s.$$

$$\text{On ne garde que la solution positive : } s = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 + 4K_s}}{2} = -0,25 + \frac{\sqrt{0,5^2 + 4 \times 1,6 \cdot 10^{-8}}}{2} = 3,2 \cdot 10^{-8}.$$

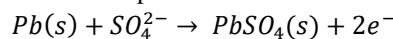
La solubilité du sulfate de plomb $PbSO_4(s)$ dans une solution d'acide sulfurique à 0,5 mol/L est donc de $3,2 \cdot 10^{-8}$ moles par litre de solution.

Conclusion : le sulfate de plomb est quasiment insoluble dans une solution sulfurique concentrée.

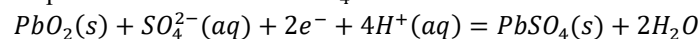
On fera intervenir le solide $PbSO_4$.

Remarque : pour calculer la valeur de s , on pourrait faire un développement limité.

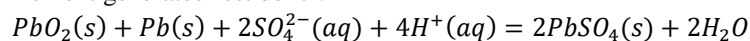
Q12. À l'anode (borne négative), en fonctionnement générateur, comme le montre la figure 5, on a oxydation du Pb. Et comme le sulfate de plomb n'est quasiment pas soluble, on n'obtient pas du Pb^{2+} mais du $PbSO_4$:



À la cathode (borne positive), comme le montre la figure 5, on a réduction du PbO_2 . Et comme le sulfate de plomb n'est quasiment pas soluble, on n'obtient pas du Pb^{2+} mais du $PbSO_4$:



La réaction globale en fonctionnement générateur est donc :



Q13. On écrit les relations de Nernst :

$$E(\text{cathode}) = E^0(\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4) + \frac{0,06}{2} \log(h^4[\text{SO}_4^{2-}])$$

$$E(\text{anode}) = E^0\left(\frac{\text{PbSO}_4}{\text{Pb}}\right) + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{1}{[\text{SO}_4^{2-}]}\right)$$

La fem à vide de la pile est donc $e = E(\text{cathode}) - E(\text{anode}) = \text{Cte} - 0,12 \text{ pH}$.

Ainsi, il vaut mieux utiliser de l'acide très concentré, pour avoir un pH faible, et une fem importante. D'autant que cela rendra l'électrolyte plus conducteur, donc la résistance interne de la batterie plus faible.

Q14. La mise en série de plusieurs éléments modifie la tension (en série, les tensions s'ajoutent).

La mise en parallèle de plusieurs éléments modifie le courant (en parallèle, les courants s'ajoutent).

Q15. La fem à vide, d'après la figure 5, est : $e_{\text{vide}} = 1,68 - (-0,33) = 2,01 \text{ V}$.

Pour obtenir une tension à vide de 12 V, il faut mettre 6 éléments en série.

Q16. L'équation bilan obtenue à la question **Q12** est écrite pour 2 électrons échangés. On voit donc que pour n moles de Pb et n moles de PbO_2 consommées (donc $2n$ moles d'élément chimique plomb), il circule dans les fils $2n$ moles d'électrons, c'est-à-dire une charge (en valeur absolue) $q = 2nF$.

La masse totale d'élément chimique plomb qui se transformera pendant que la charge totale Q circulera, sera donc

$$m_{\text{Pb}} = 2nM_{\text{Pb}} = \frac{Q}{F} M_{\text{Pb}}$$

NB : la question était ambiguë : certains ont peut-être pensé à calculer uniquement la masse de Pb sous forme Pb.

Q17.

Notons v_i la norme de la vitesse du véhicule avant le freinage, d la distance qu'elle a parcouru en ligne quasi-droite, avant de tourner, v_f sa vitesse finale, au moment où elle semble être partie dans le bas-côté.

Pour estimer d , on peut utiliser les bandes blanches du bord gauche de la route : les traces de freinage s'étalent sur environ 6 périodes spatiales (bande blanche plus zone non peinte) de ces signalisations horizontales du bord gauche, d'où $d \simeq 6 \times (3 + 3,5) \simeq 40 \text{ m}$.

La route semble horizontale, et rien n'est dit par rapport à cela, donc nous le supposons.

Lors de la phase de freinage, si on isole la voiture dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, en lui appliquant le théorème de la résultante dynamique, on peut écrire, en notant \vec{T} la réaction du sol tangentielle pour l'ensemble des 4 roues, et \vec{N} la réaction normale (aussi pour les 4 roues) : $\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$, et en projetant sur l'axe vertical (l'accélération étant horizontale), on obtient (en négligeant la force de traînée de l'air devant \vec{T}) :

$$\vec{N} = -m\vec{g}.$$

Et en utilisant la loi de Coulomb, rappelée dans l'énoncé : $|\vec{T}| = fmg$. Cette norme est donc constante dans le temps.

On note \vec{u}_x le vecteur unitaire horizontal repérant l'axe du mouvement.

Puisque le mouvement est horizontal, la seule force qui travaille (parmi $\vec{T}, \vec{N}, m\vec{g}$) est \vec{T} . En conséquence, en notant W le travail de cette force, le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à la voiture dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, tout le long du parcours de distance d , s'écrit : $\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = W$. Et $W = \int_0^d \vec{T} \cdot dx \vec{u}_x = \int_0^d -fmg \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \int_0^d -fmg dx = -fmgd$.

On en déduit $v_f^2 - v_i^2 = -2fgd$, puis $v_i^2 = v_f^2 + 2fgd$, et donc $v_i = \sqrt{v_f^2 + 2fgd}$.

Il est difficile de savoir quelle est la valeur de v_f , mais la voiture semble s'être arrêtée dans l'herbe, sans avoir percuté les barbelés. Et comme on ne voit pas de traces de freinage venant d'en face, près de la zone d'arrêt du véhicule qu'on étudie, on peut supposer qu'il n'y a pas eu de choc avec un autre véhicule. D'où la supposition $v_f \simeq 0$. Cela nous donnera ainsi un minorant de v_i .

Numériquement, on obtient par temp sec : $v_i \simeq \sqrt{2 \times 0,8 \times 10 \times 40} \simeq \sqrt{8 \times 8 \times 10} \simeq 8\sqrt{10} \simeq 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq \boxed{86 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$.

Par temps mouillé, cela ferait moins, puisque f serait plus petit.

On ne sait pas si c'était une route limitée à 80 ou 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, donc il est difficile de conclure, mais il semblerait que le véhicule n'ait pas été en gros excès de vitesse. Il faudrait des informations complémentaires (sol mouillé ou non, position finale de la voiture, cause du freinage, etc) pour pouvoir affiner la conclusion.

Q18. La réaction de l'éthanol sur le dichromate de potassium s'obtient en cherchant d'abord les demi-réactions.

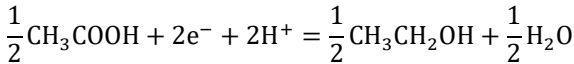
Dans $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, si on compte $+I$ pour H, $-II$ pour O, on obtient **une moyenne de $-II$** pour C.

Mais le premier carbone est au nombre d'oxydation $-III$, et le second au nombre d'oxydation $-I$.

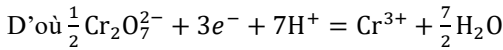
Dans CH_3COOH , le nombre d'oxydation **moyen pour le carbone est 0**.

Mais le premier carbone n'a pas changé, et est au nombre d'oxydation $-III$, donc le second au nombre d'oxydation $+III$.

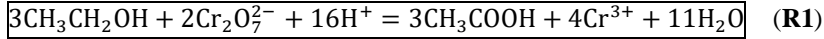
On peut écrire la demi-réaction, en se ramenant à chaque fois à un seul élément carbone :



Dans $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$, le nombre d'oxydation du chrome est $+VI$. Et dans Cr^{3+} , il est de $+III$.

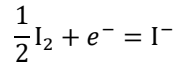


On combine les deux demi-réactions, en multipliant la première par (-3) et la seconde par $(+2)$, ou encore mieux, pour éviter les fractions, la première par (-6) et la seconde par $(+4)$:



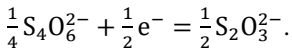
On rappelle que l'ion potassium, K^+ , est inerte, et ne participe pas à la réaction. Quand on met du dichromate de potassium, $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ dans de l'eau, il se transforme entièrement en 2K^+ et $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$.

Le couple faisant intervenir l'iode est I_2/I^- , avec comme demi-réaction :



En combinant avec la demi-réaction du dichromate : $\boxed{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 6\text{I}^- + 14\text{H}^+ = 2\text{Cr}^{3+} + 3\text{I}_2 + 7\text{H}_2\text{O}}$ $(\mathbf{R2})$.

Le couple faisant intervenir le thiosulfate est $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$: le nombre d'oxydation du soufre y est de $5/2$ et de $+II$, d'où :



Et si on combine avec la demi-équation pour l'iode : $\boxed{\text{I}_2 + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-} = \text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{I}^-}$ $(\mathbf{R3})$.

Q19. Le diode en solution aqueuse est de couleur orangée.

En revanche, les ions iodure sont incolores, donc la fin (c'est-à-dire l'équivalence) du dosage du diode par les ions thiosulfate correspondra à la disparition de la coloration orangée.

Q20. Faisons un schéma pour décrire les différentes étapes du processus :

- Dans un volume V_0 de sang, il y a n moles d'éthanol, que l'on cherche à connaître.
- Ces n moles se retrouvent dans le volume V_2 de distillat.
- Mais dans la fiole jaugée, on n'introduit qu'un volume V_4 de distillat, donc seulement $n \frac{V_4}{V_2}$ moles d'éthanol.
- Notons x le nombre de moles d'ions dichromates $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ ajoutés au distillat dans la fiole jaugée. Comme cela est dit dans le préambule, les ions dichromate sont en excès, donc la réaction $(\mathbf{R1})$ transforme tout l'éthanol en acide éthanoïque : on obtient dans la fiole, puis dans l'erlenmeyer $n \frac{V_4}{V_2}$ moles d'acide éthanoïque CH_3COOH ; et du fait des coefficients stœchiométriques de $(\mathbf{R1})$, il reste $\left(x - \frac{2}{3}n \frac{V_4}{V_2}\right)$ moles de $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$.
- Les ions iodure servent à doser les ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ restant, selon la réaction $(\mathbf{R2})$. Cette réaction colore en orange la solution, et compte tenu de la stœchiométrie de $(\mathbf{R2})$ le nombre de moles de I_2 qui se forment via $(\mathbf{R2})$ est $3 \left(x - \frac{2}{3}n \frac{V_4}{V_2}\right)$.
- Ensuite, on fait réagir ces $3 \left(x - \frac{2}{3}n \frac{V_4}{V_2}\right)$ moles de I_2 avec les ions thiosulfate, selon la réaction $(\mathbf{R3})$. La stœchiométrie de $(\mathbf{R3})$ permet de dire que l'on est à l'équivalence lorsque le nombre de moles de thiosulfate versé est le double du nombre de moles de diode : $C_6V_{\text{éq6}} = 2 \times 3 \left(x - \frac{2}{3}n \frac{V_4}{V_2}\right)$.
- En refaisant tout pareil mais sans éthanol, c'est-à-dire pour $n = 0$, on obtient $C_6V_{\text{éq7}} = 2 \times 3(x - 0) = 6x$, ce qui permet de déterminer x .
- En définitive, $C_6V_{\text{éq6}} = C_6V_{\text{éq7}} - 4n \frac{V_4}{V_2}$, puis $n = \frac{V_2C_6}{4V_4} (V_{\text{éq7}} - V_{\text{éq6}})$.
- La concentration d'alcool dans le sang cherchée est $c_0 = \frac{n}{V_0}$, d'où $\boxed{c_0 = \frac{V_2C_6}{4V_4V_0} (V_{\text{éq7}} - V_{\text{éq6}})}$.

Q21. On voit clairement sur la figure 8 que les deux enveloppes du signal ne se croisent pas (taux de modulation $m < 1$). Notons V_1 la valeur maximale de l'enveloppe supérieure $\text{env}_+(t) = U(1 + m \cos(\omega_0 t))$ et V_2 sa valeur minimale.

On a donc : $V_1 = U(1 + m)$, et $V_2 = U(1 - m)$. D'où $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1-m}{1+m}$, puis $m = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$. Or, on lit sur la courbe $V_1 = 7,0 \text{ V}$ et $V_2 = 3,0 \text{ V}$.

On en déduit $\boxed{m = \frac{7-3}{7+3} = 0,40}$.

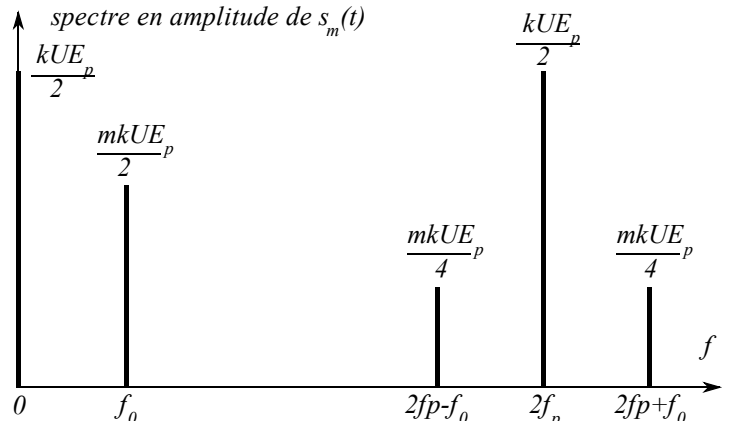
De plus, grâce à l'échelle horizontale, on a $12 \text{ ms} = \frac{2}{f_0}$, d'où $f_0 = 0,17 \text{ kHz}$. Et sur la durée de deux périodes du signal modulant, on compte 19 cycles de la porteuse, donc $\frac{19}{f_p} = \frac{2}{f_0}$, puis $f_p = 1,6 \text{ kHz}$.

Q22. Une analyse dimensionnelle montre aisément que k est homogène à l'inverse d'une tension, donc k est en V^{-1} . Les circuits multiplicateurs présentent en général une valeur $k = 0,10 \text{ V}^{-1}$.

Q23. $s_m(t) = kU(1 + m \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_p t) \times E_p \cos(\omega_p t) = \frac{kUE_p}{2} (1 + \cos(2\omega_p t))(1 + m \cos(\omega_0 t))$.

D'où $s_m(t) = \frac{kUE_p}{2} \left[1 + \cos(2\omega_p t) + m \cos(\omega_0 t) + \frac{m}{2} \cos((2\omega_p + \omega_0)t) + \frac{m}{2} \cos((2\omega_p - \omega_0)t) \right]$

Le spectre en amplitude est dessiné ci-contre.



Q24. On voit bien sur le schéma ci-contre que le signal informatif $s_{inf}(t)$ (ici très pauvre car limité à une sinusoïde de fréquence f_0) a son spectre situé dans le domaine des basses fréquences. Pour le récupérer, on peut donc effectuer un filtrage passe-bas, avec une fréquence de coupure peu supérieure à f_0 (donc très petite par rapport à $2f_p$). Et pour éliminer la composante continue, on peut utiliser un filtre passe-haut de très petite fréquence de coupure (très petite par rapport à f_0).
On pourrait aussi n'utiliser qu'un seul filtre, passe-bande.

Q25. Le montage fait apparaître un rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse; le montage est donc potentiellement stable.

Q26. L'ALI étant idéal et en fonctionnement linéaire (cf hypothèses de l'énoncé), on peut écrire $v^+ = v^-$. Or, le théorème du pont diviseur de tension donne $v^+ = \frac{R_4}{R_3+R_4} V_d$.

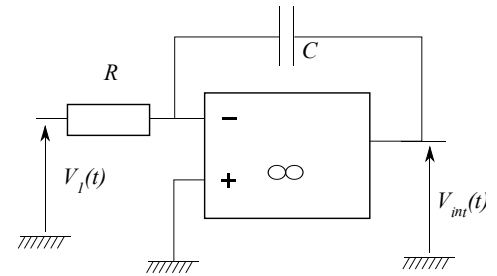
De plus, la loi des nœuds écrite avec les potentiels donne : $\frac{V_m - v^-}{R_1} = \frac{v^- - V_s}{R_2}$, d'où $v^- = \frac{V_m R_2 + V_s R_1}{R_1 + R_2}$.

En égalisant, on obtient $V_s = \frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1(R_3+R_4)} V_d - \frac{R_2}{R_1} V_m$.

Il suffit de choisir $R_2 = R_1$ et $R_4 = R_3$, pour obtenir $V_s = V_d - V_m$.

Q27. Le montage intégrateur est rappelé ci-contre. L'ALI étant idéal et en fonctionnement linéaire, $v^- = v^+ = 0$. Et en utilisant le fait que le courant est le même dans R et C , on obtient $V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt + V_{int}(0)$. Or on nous indique dans l'énoncé que $V_{int}(0)$,

donc $V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt$.



Q28. Compte tenu du schéma de la figure 10,

$V_s(t) = V_{2m} \cos(\omega_2 t - \frac{\pi}{2}) - k \left(-\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt \right) V_{2m} \cos(\omega_2 t)$;

Soit $V_s(t) = V_{2m} \cos(\omega_2 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{kV_{2m} V_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$, ou encore $V_s(t) = V_{2m} \left[\sin(\omega_2 t) + \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \right]$

En développant le sinus dans l'expression de l'énoncé, on obtient

$V_s(t) = V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[\sin(\omega_2 t) \cos(\varphi(t)) + \sin(\varphi(t)) \cos(\omega_2 t) \right]$

Puisque cette expression doit être égale à la précédente pour tout t , on peut identifier terme à terme, et on obtient 2 équations :

$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \cos(\varphi(t)) = 1$ (1)

$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \sin(\varphi(t)) = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t)$ (2).

Le rapport des équations (2) et (1) donne $\tan(\varphi(t)) = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t)$.

Et en faisant $(1)^2 + (2)^2$, on obtient $1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t) = 1 + \left(\frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \right)^2 \sin^2(\omega_1 t)$, d'où $\varepsilon = \pm \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1}$. On peut prendre par exemple le signe +.

Q29. Des deux relations obtenues à Q28, on peut déduire $\tan(\varphi(t)) = \varepsilon \sin(\omega_1 t)$.

Puisque $\varepsilon \ll 1$, $\tan(\varphi(t)) \approx \varphi(t) \approx \sin(\varphi(t))$, et $\cos(\varphi(t)) \approx 1$,

donc la relation de l'énoncé $V_s(t) = V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[\sin(\omega_2 t + \varphi(t)) \right]$ peut s'écrire

$V_s(t) \approx V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[\sin(\omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t)) \right]$.

Et en se limitant à l'ordre 1 en ε , la racine carrée est équivalente à 1, d'où $V_s(t) \approx V_{2m} \sin(\omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t))$, ce qui est la forme proposée par l'énoncé, en posant $m = \varepsilon = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1}$.

Q30. Selon les notations de l'énoncé, $\psi(t) = \omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t)$, et $\Omega(t) = \frac{d\psi}{dt}(t) = \omega_2 + \varepsilon \omega_1 \cos(\omega_1 t)$,

d'où $\Omega(t) = \omega_2 + \frac{k}{RC} V_{1m} \cos(\omega_1 t) = \boxed{\omega_2 + \frac{k}{RC} V_1(t)}$. On voit bien que la pulsation instantanée $\Omega(t)$ de $V_s(t)$ est fonction affine de $V_1(t)$, ce qui est bien une caractéristique de la modulation de fréquence.

Q31. Les ondes de communication avec les satellites doivent pouvoir traverser l'ionosphère, donc s'y propager. Il faut donc que k puisse exister et soit réel, donc que $\omega > \omega_{plasma}$. On choisit donc $f_3 = 1227 \text{ MHz} > f_{plasma}$.

En revanche, les ondes radio en AM (modulation d'amplitude) n'ont pas vocation à voyager en dehors de l'atmosphère terrestre. Au contraire, afin de pouvoir atteindre des points de la Terre au-delà de l'horizon, il est utile que les ondes ne puissent pas se propager dans le plasma (et se réfléchissent sur l'ionosphère). Il faut donc que k ne puisse pas exister sous forme réelle, mais uniquement sous forme imaginaire pure, donc que $\omega < \omega_{plasma}$. On choisit donc $f_1 = 162 \text{ kHz} < f_{plasma}$.

Q32. La taille d'une antenne quart d'onde est $\ell = \frac{c}{4f}$, ce qui donne pour la FM de l'ordre de $\ell \simeq \frac{3 \cdot 10^8}{4 \times 100 \cdot 10^6} = 0,7 \text{ m}$. C'est en effet

l'ordre de grandeur des antennes qui ont longtemps été utilisées sur les voitures pour les autoradios.

Les antennes de GPS sont plus petites, donc les signaux GPS sont de fréquence supérieure à 100 MHz. Heureusement car les signaux GPS nous viennent de satellites.