

Centrale PSI 2021 Physique-Chimie 1 : Le feu et l'eau

I. Le feu

I.A. Démarrage d'une combustion

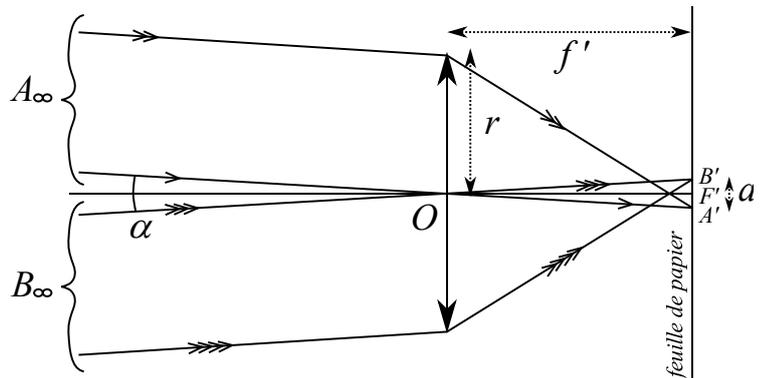
Q1 La loi d'Arrhenius exprime la dépendance de la constante de vitesse d'une réaction chimique avec la température : $k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$, où E_a est l'énergie d'activation de la réaction, grandeur positive. Cette loi montre que $k(T)$ est une fonction croissante de T : les réactions chimiques sont donc accélérées par une augmentation de la température.

Q2 L'amorçage d'une combustion est facilité si le combustible est à l'état gazeux. En effet, le mélange entre le combustible-et le comburant se fait mieux lorsque les deux sont en phase gazeuse. La cinétique de la combustion est donc beaucoup plus rapide en phase gazeuse homogène.

D'autre part, la capacité thermique volumique $c_{P,vol}$ d'un combustible est bien plus petite pour un gaz que pour une phase condensée. Par conséquent, un même volume de combustible recevant une puissance de chauffage donnée verra sa température augmenter beaucoup plus vite et beaucoup plus si le combustible est gazeux plutôt que liquide ou solide.

Q3 Notons :

- T_{ai} la température d'auto-inflammation du papier (232 °C) ;
- T_{ini} la température initiale du papier (20 °C) ;
- τ le taux d'absorption de la lentille (25%) ;
- ϕ le flux surfacique solaire moyen (800 W.m⁻²) ;
- Δt la durée minimale pour l'auto-inflammation ;
- a le diamètre de l'image géométrique du Soleil formée par la lentille dans son plan focal image, sur la feuille de papier.



Le schéma ci-contre représente les rayons lumineux issus des deux points extrêmes du soleil : A_∞ et B_∞ . Les images de ces deux points sont A' et B' . On a donc $A'B' = a$. Et puisque le diamètre angulaire apparent du soleil est α , les rayons lumineux venant de A_∞ sont inclinés de α par rapport à ceux venant de B_∞ . Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on a donc $a = f'\alpha$.

La surface de l'image du Soleil vaut donc $S = \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2$, et la masse de papier associée : $m = \sigma \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2$.

La puissance reçue par la masse m de papier est égale à $(1 - \tau)$ fois la puissance interceptée par la lentille en provenance du Soleil : $\mathcal{P} = (1 - \tau) \phi \pi r^2$.

On applique le premier principe de la thermodynamique à la masse m de papier, pendant la durée Δt cherchée, en supposant que toute la puissance reçue est absorbée par le papier : $mc(T_{ai} - T_{ini}) = \mathcal{P}\Delta t$. On obtient donc :

$$\sigma \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2 c (T_{ai} - T_{ini}) = (1 - \tau) \phi \pi r^2 \Delta t$$

$$\text{Par conséquent : } \Delta t = \frac{\sigma c \alpha^2 f'^2}{4(1-\tau) \phi r^2} (T_{ai} - T_{ini}) = \frac{0,1 \times 1400 \times \left(\frac{32 \times \pi}{60 \times 180}\right)^2 \times 0,1^2}{4 \times (1-0,25) \times 800 \times 0,05^2} \approx 4 \text{ ms}$$

Q4 La valeur trouvée semble vraiment très faible. En réalité, le papier n'absorbe pas toute la puissance reçue mais en réfléchit une partie. De plus, une partie de la puissance reçue est évacuée vers l'extérieur de l'image par diffusion thermique au sein du papier et par rayonnement.

Le choix du papier noir permet de minimiser la fraction de puissance re-rayonnée par le papier.

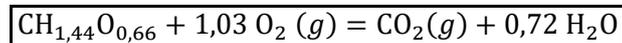
I.B. Combustion du bois

Q5 Les données sont les fractions massiques du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène dans le bois, considéré de formule chimique CH_xO_y : $w_C = 0,50$; $w_H = 0,06$ et $w_O = 0,44$.

$$\text{On a : } w_C = \frac{M_C}{M_C + xM_H + yM_O}, w_H = \frac{xM_H}{M_C + xM_H + yM_O} \text{ et } w_O = \frac{yM_O}{M_C + xM_H + yM_O},$$

$$\text{d'où : } \boxed{x = \frac{w_H M_C}{w_C M_H}} = 1,44 \text{ et } \boxed{y = \frac{w_O M_C}{w_C M_O}} = 0,66. \text{ La formule chimique du bois est donc bien : } \text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}.$$

Q6 L'équation bilan de la combustion complète (C) du bois s'écrit :



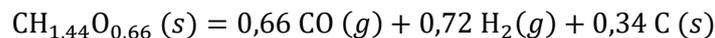
Q7 On note $Q_{fournie}$ l'énergie thermique dégagée par la combustion complète d'une masse m de bois, avec obtention d'eau vapeur, de façon isobare, en proportions stoechiométriques. Le premier principe appliqué à l'ensemble des réactifs et produits s'écrit : $\Delta H = -Q_{fournie}$.

$$\text{D'où } \Delta_r H^0(\xi_f - \xi_i) = -Q_{fournie}, \text{ c'est-à-dire } \Delta_r H^0 \left(\frac{m}{M_{\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}}} - 0 \right) = -Q_{fournie}.$$

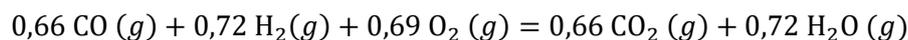
$$\text{On en déduit } \frac{\Delta_r H^0}{M_{\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}}} = -\frac{Q_{fournie}}{m}, \text{ c'est-à-dire } \frac{\Delta_r H^0}{M_{\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}}} = -PCI,$$

$$\text{donc : } \boxed{\Delta_r H^0 = -M_{\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}} PCI = -(12 + 1,44 + 0,66 \times 16) \times 19.10^3 = -456 \text{ kJ. mol}^{-1}}$$

Q8 L'équation bilan de la pyrolyse (P) s'écrit :



La réaction de combustion des gaz de pyrolyse est la réaction (2) :



$$\text{On a donc } \Delta_r H^0(2) = -0,66\Delta_f H^0(\text{CO}, g) + 0,66\Delta_f H^0(\text{CO}_2) + 0,72\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}, g)$$

$$\boxed{\Delta_r H^0(2) = -0,66 \times (-110,6) + 0,66 \times (-393,5) + 0,72 \times (-241,8) = -361 \text{ kJ. mol}^{-1}}$$

On constate que la combustion des gaz de pyrolyse est nettement exothermique ; elle doit donc permettre d'entretenir la réaction de pyrolyse qui, elle, doit être endothermique.

En effet, en notant (3) la réaction de combustion de la braise : $0,34 \text{ C} (s) + 0,34 \text{ O}_2 (g) = 0,34 \text{ CO}_2 (g)$,

$$\text{On a : } (C) = (P) + (2) + (3), \text{ donc } \Delta_r H^0(P) = \Delta_r H^0 - \Delta_r H^0(2) - \Delta_r H^0(3),$$

$$\text{C'est-à-dire } \Delta_r H^0(P) = -456 + 361 - (0,34 \times -393,5) = +38,6 \text{ kJ. mol}^{-1}.$$

Q9 C'est un calcul classique type « température de flamme ».

L'évolution est adiabatique et isobare. Pour le système constitué de la pièce et de la bûche, le premier principe s'écrit : $\Delta H = 0$. En passant par un chemin fictif constitué d'abord de la réaction isobare et isotherme, puis du réchauffement isobare de la pièce, l'équation devient, en négligeant les capacités thermiques des produits de la réaction, et en supposant que l'hygrométrie permet à l'eau formée de rester sous forme vapeur :

$$\Delta_r H^0 \xi_f + C(T_f - T_i) = 0 ; \text{ c'est-à-dire } -PCI \times m + C(T_f - T_i) = 0$$

$$\text{On en déduit } \boxed{T_f = T_i + \frac{PCI \times m}{C} = 20 + \frac{19.10^6}{6,0.10^5} = 52^\circ\text{C}}.$$

Cette valeur est manifestement très excessive ! En réalité, la transformation n'est évidemment pas adiabatique. La combustion d'une bûche est un processus lent, et donc les fuites thermiques ne sont sûrement pas négligeables.

I.C. Propagation de la chaleur dans le combustible

Q10 Les trois modes de transfert thermique sont :

- la conduction : transfert thermique dans un milieu matériel au repos (solide, liquide, gazeux), dû aux échanges énergétiques à l'échelle microscopique ;
- la convection : transfert thermique dû aux mouvements du milieu support (liquide ou gazeux) ;
- le rayonnement : transfert thermique dans un milieu transparent ou dans le vide, par propagation d'ondes électromagnétiques.

Q11 On peut s'appuyer sur la figure 1 de l'énoncé pour répondre : le rayonnement des flammes et la convection réchauffent la partie du bois non encore en feu ; cela provoque notamment la sortie de l'humidité. L'effet du rayonnement et de la convection est important, on le voit bien en brûlant une allumette : selon la façon dont on la penche, elle brûle plus ou moins vite.

Il est bien connu que la convection forcée augmente sensiblement la propagation du feu, par rapport à la simple convection naturelle : le vent pour les incendies de forêt, le soufflet pour allumer le feu de cheminée.

Les parties solides sont le siège de conduction, ce qui permet aux parties encore non consommées d'atteindre la température d'inflammation (ce que confirme la question 11).

Q12 Pour effectuer le bilan d'enthalpie demandé, on applique le 1^{er} principe entre t et $t + dt$ à la tranche $[x, x + dx]$: $dH = dt(S j_{cd}(x, t) - S j_{cd}(x + dx, t)) + \mu S dx \mathcal{P}_c dt$

$$D'où \mu c_p S dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) S dx dt + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, t) S dx dt + \mu S dx \mathcal{P}_c dt$$

$$\text{On obtient donc : } \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa, \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\mu c_p} \text{ et } \kappa = \frac{\mathcal{P}_c}{c_p}.$$

Q13 Dans la zone non altérée, il n'y a pas de terme source lié à la combustion. Donc : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Q14 La durée caractéristique de la diffusion thermique est donnée par :

$$\tau_d \approx \frac{L^2}{D} = \frac{0,1^2}{10^{-7}} \approx 10^5 \text{ s} \approx 28 \text{ h}$$

La durée caractéristique de combustion de la poutre est plus difficile à évaluer. Pour une longueur L de poutre, on peut dire que la durée de la combustion correspond au temps qu'il faut pour que l'ensemble de la tranche soit à la température T_c de combustion, sachant qu'au démarrage de la combustion, la température de la tranche s'étalait de T_i à T_c : $\mu S L \mathcal{P}_c \tau_c \approx \mu S L c_p (T_c - T_i)$

$$D'où \tau_c \approx \frac{c_p}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_i) = 100 \text{ s} \approx 2 \text{ min}$$

La combustion est donc un phénomène beaucoup plus rapide que la diffusion, phénomène très lent.

Q15 c est la vitesse de propagation de l'onde recherchée.

Q16 On effectue le changement de variables indiqué et on obtient : $\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \theta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -c \theta'(u) \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \theta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \theta'(u) \end{cases}$

Par conséquent, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta''(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \theta''(u)$. On en déduit :

• Dans la zone inaltérée :

$$\theta''(u) + \frac{c}{D}\theta'(u) = 0$$

• Dans la zone de combustion :

$$\theta''(u) + \frac{c}{D}\theta'(u) = -\frac{\kappa}{D}$$

Q17

• Dans la zone 1 définie par $u < u_1$ où $u_1 = x_1(t) - ct$, la température est supposée constante donc

$$\theta(u < u_1) = Cte = a_1$$

• Dans la zone 3 définie par $u > u_2$ où $u_2 = x_2(t) - ct$, $\theta''(u) + \frac{c}{D}\theta'(u) = 0$. Par conséquent, $\theta'(u) = c_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right)$. On en déduit : $\theta(u) = -\frac{D}{c}c_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) + a_3$, ce qui se réécrit bien :

$$\theta(u > u_2) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right)$$

• Dans la zone 2 définie par $u_1 < u < u_2$, $\theta''(u) + \frac{c}{D}\theta'(u) = -\frac{\kappa}{D}$. Par conséquent, $\theta'(u) = c_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}$

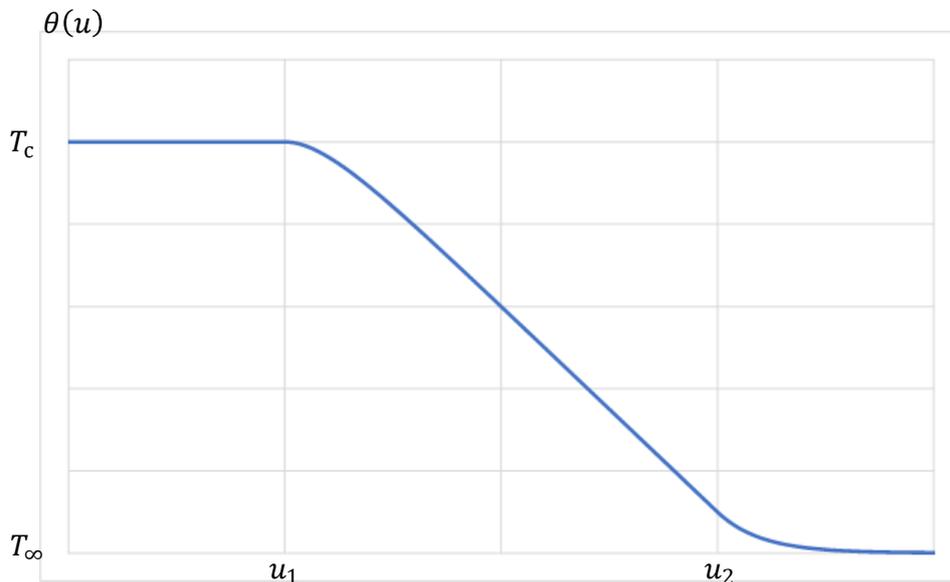
On en déduit : $\theta(u) = -\frac{D}{c}c_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u + a_2$, ce qui se réécrit bien :

$$\theta(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u$$

Q18 Comme la température est uniforme et constante dans la zone 1, $a_1 = T_c$.

D'autre part, quand $u \rightarrow \infty$, c'est-à-dire quand $x \rightarrow \infty$ à t fixé, $T \rightarrow T_\infty$ donc $a_3 = T_\infty$.

Q19 La fonction doit être continue et dérivable en u_1 et en u_2 car la température et le flux thermique doivent être continus. On obtient donc l'allure suivante :



Q20 La température doit être continue le long de la poutre (qui est d'un seul tenant) donc :

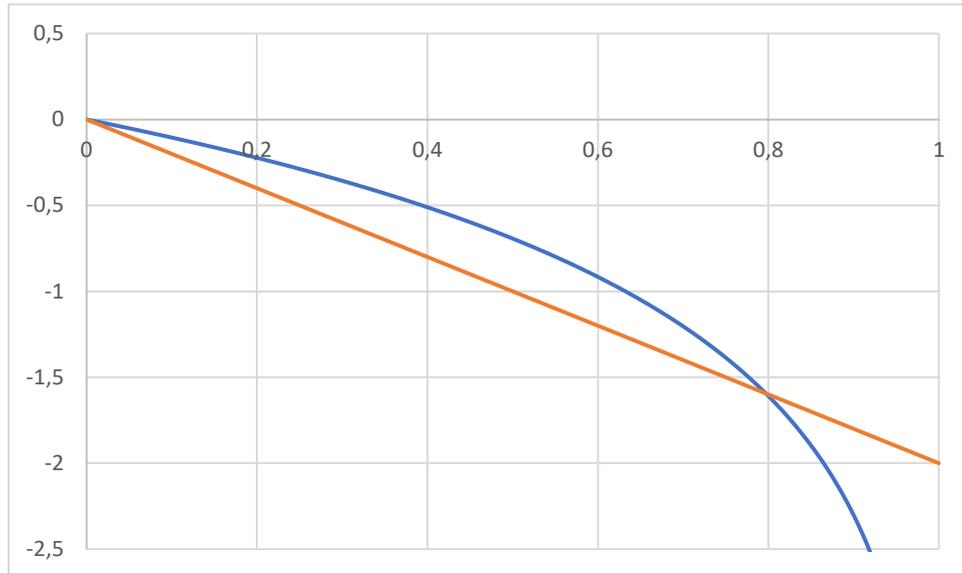
$$\begin{cases} a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u_1\right) - \frac{\kappa}{c}u_1 = T_c \\ a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u_2\right) - \frac{\kappa}{c}u_2 = T_\infty + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u_2\right) \end{cases}$$

On voit que ces deux équations ne suffisent pas à déterminer les trois inconnues a_2 , b_2 et b_3 . Il faut donc ajouter une équation traduisant la continuité du flux thermique en u_1 ou en u_2 . Choisissons la condition aux limites en u_1 car elle est plus simple. On obtient : $\theta'(u_1^-) = \theta'(u_1^+)$, soit : $0 = \theta'(u_1^+)$, d'où :

$$-\frac{c}{D} b_2 \exp\left(-\frac{c}{D} u_1\right) - \frac{\kappa}{c} = 0, \text{ ou encore : } \boxed{\frac{c}{D} b_2 \exp\left(-\frac{c}{D} u_1\right) = -\frac{\kappa}{c}}$$

Q21 Posons : $x = \frac{c^2}{\kappa D} (T_i - T_\infty)$. Il s'agit donc de résoudre l'équation : $\ln(1 - x) = -\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} x = -2x$

Cherchons l'intersection de ces deux courbes :



On constate que les deux courbes se coupent pour $x \approx 0,8$. On en déduit :

$$\boxed{c \approx \sqrt{\frac{0,8\kappa D}{T_i - T_\infty}} = \sqrt{\frac{0,8 \times 2 \cdot 10^{-7}}{200}} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

C'est une valeur qui paraît **faible** pour cette célérité !

Q22 Le temps de combustion complète d'un mètre de poutre est donc de l'ordre de :

$$\boxed{\Delta t_{\text{comb}} \approx \frac{L}{c} \approx 10 \text{ h}}$$

II. Le plomb

II.A. L'élément plomb. Oxydation du plomb.

Q23 La population de la maille conventionnelle vaut $N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$. La masse volumique du plomb

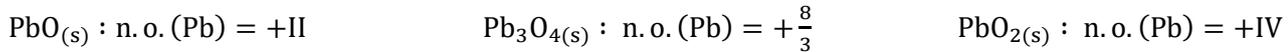
est donnée par $\mu_{\text{Pb}} = \frac{NM_{\text{Pb}}}{N_A a^3}$. On en déduit : $\boxed{a = \sqrt[3]{\frac{NM_{\text{Pb}}}{N_A \mu_{\text{Pb}}}} = 495 \text{ pm}}$

Q24 Dans les zones où la température est inférieure à 327 °C, le plomb est solide. Dans les zones où la température est comprise entre 327 °C et 800 °C, le plomb est liquide. Et il y avait des vapeurs de plomb, même si la température n'atteignait pas 1749 °C, du fait de la présence d'un mélange gazeux (on a bien de la vapeur d'eau présente dans de l'air à 20 °C).

Q25 Les trois équations bilans s'écrivent :

$$\begin{cases} 2\text{Pb}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = 2\text{PbO}_{(s)} \\ \frac{3}{2}\text{Pb}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = \frac{1}{2}\text{Pb}_3\text{O}_{4(s)} \\ \text{Pb}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = \text{PbO}_{2(s)} \end{cases}$$

Q26 Les trois nombres d'oxydation du plomb dans les trois oxydes valent :



Le nombre d'oxydation fractionnaire trouvé pour $\text{Pb}_3\text{O}_{4(s)}$ signifie qu'en réalité une molécule de $\text{Pb}_3\text{O}_{4(s)}$ contient 2 atomes de plomb au degré d'oxydation +II et un atome de plomb au degré d'oxydation +IV.

Q27 L'enthalpie standard de la réaction formant $2\text{PbO}_{(s)}$ à $T_0 = 298 \text{ K}$ vaut :

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{PbO}_{(s)}) = -436 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'entropie standard de la réaction formant $2\text{PbO}_{(s)}$ à $T_0 = 298 \text{ K}$ vaut :

$$\Delta_r S^\circ = 2S_m^\circ(\text{PbO}_{(s)}) - 2S_m^\circ(\text{Pb}_{(s)}) - S_m^\circ(\text{O}_{2(g)}) = -201 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On en déduit l'enthalpie libre standard de cette réaction à $T_0 = 298 \text{ K}$:

$$\Delta_r G^\circ(T_0) = \Delta_r H^\circ - T_0 \Delta_r S^\circ = -376 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par conséquent,

$$K^\circ(T_0) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T_0)}{RT_0}\right) \approx 9 \cdot 10^{65}$$

Q28 Le quotient réactionnel s'écrit : $Q_r = \frac{P^\circ}{P_{\text{O}_2}}$. Partant d'un état d'équilibre chimique, une diminution de P_{O_2} à température constante conduit à $Q_r > K^\circ(T)$. Cette perturbation entraîne une rupture de l'équilibre chimique dans le sens de la disparition de l'oxyde de plomb.

Q29 Plaçons-nous sur la frontière entre les domaines d'existence de $\text{PbO}_{(s)}$ et $\text{Pb}_{(s)}$: puisque les deux solides coexistent avec le dioxygène, on y est à l'équilibre chimique, c'est-à-dire que $Q_r = \frac{P^\circ}{P_{\text{O}_2}} = K^\circ(T)$. Cette Loi d'Action des Masses peut aussi s'écrire, le long de cette frontière : $-RT \ln(K^\circ(T)) = RT \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ}\right)$

Il suffit donc de chercher l'ordonnée du point d'abscisse $T = T_0 = 298 \text{ K}$ sur la droite d'équation $y = RT \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ}\right)$ séparant les domaines d'existence de $\text{PbO}_{(s)}$ et $\text{Pb}_{(s)}$: on mesure environ $RT_0 \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P^\circ}\right) \approx -375 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Par conséquent, $K^\circ(T_0) \approx 6 \cdot 10^{65}$. C'est le bon ordre de grandeur. NB : à quoi correspond le pointillé sur la figure 3 ?

Q30 Pour $T = 773 \text{ K}$, et pour une pression partielle de dioxygène de l'ordre de 0,2 bar, le point de la figure 3 est d'abscisse 773 et d'ordonnée $8,31 \times 773 \times \ln(0,2) = -10,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. On est donc dans le domaine de stabilité de $\text{PbO}_{(s)}$.

II.B. Détection du plomb

Q31 La détection des raies K nécessite un apport énergétique de 88 keV pour exciter les atomes alors que la détection des raies L ne nécessite qu'un apport de 14,3 keV. Les appareils à tube à rayons X ne pouvant fournir plus que 15 keV, ils permettent effectivement de détecter les raies L, mais pas les raies K.

Q32 Le niveau fondamental est le plus bas, soit le niveau K.

Par conséquent, $\varepsilon_{M \rightarrow K} = 85 \text{ keV}$ et $\varepsilon_{L \rightarrow K} = 73,7 \text{ keV}$.

Les longueurs d'ondes correspondantes sont données par $\lambda_{M \rightarrow K} = \frac{hc}{\varepsilon_{M \rightarrow K}} = 14,6 \text{ pm}$ et

$\lambda_{L \rightarrow K} = \frac{hc}{\varepsilon_{L \rightarrow K}} = 16,9 \text{ pm}$. Elles sont bien plus petites que des longueurs d'onde du domaine visible, qui sont de l'ordre du micron.

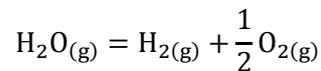
Q33 Le spectre de droite présente deux pics proches de $\varepsilon_{M \rightarrow K}$ et $\varepsilon_{L \rightarrow K}$. Le spectre de gauche présente un pic à 14,7 keV proche de $\varepsilon_{0 \rightarrow L}$. L'ensemble de ces trois pics permet donc d'identifier les raies K, L et M.

Les deux pics à 10,5 keV et 12,6 keV pourraient correspondre à deux transitions $M \rightarrow L$ (valeur théorique 11,3 keV) avec un dédoublement de la raie.

III. L'eau

III.A. Extinction du feu

Q34 La réaction de décomposition de l'eau s'écrit :



Calculons sa constante d'équilibre à $T_0 = 298 \text{ K}$. L'enthalpie standard de la réaction vaut :

$$\Delta_r H^\circ = -\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) = 241,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'entropie standard de la réaction vaut, quant à elle :

$$\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{H}_{2(g)}) + \frac{1}{2}S_m^\circ(\text{O}_{2(g)}) - S_m^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) = 130,5 + 102,5 - 188,7 = 44,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On en déduit l'enthalpie libre standard de cette réaction à $T_0 = 298 \text{ K}$:

$$\Delta_r G^\circ(T_0) = \Delta_r H^\circ - T_0 \Delta_r S^\circ = 229 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par conséquent, $K^\circ(T_0) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T_0)}{RT_0}\right) = 8 \cdot 10^{-41}$

Cette valeur est extrêmement faible : la réaction ne se fait pratiquement pas à $T_0 = 298 \text{ K}$. Mais d'après la loi de Van't Hoff la constante de réaction augmente avec la température, puisque $\Delta_r H^\circ > 0$.

$$\frac{d(\ln K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} > 0$$

À $T = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, température de la braise (cf bas de la page 1), $K^\circ(1073 \text{ K}) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(1073)}{1073 R}\right) = 3 \cdot 10^{-10}$

Cette valeur est encore beaucoup trop faible pour que la décomposition de l'eau soit observée à $800 \text{ }^\circ\text{C}$.

Q35 On applique le premier principe à la masse $m_0 = 1 \text{ kg}$ d'eau, de température initiale $T_1 = 288 \text{ K}$. On imagine un chemin thermodynamique qui amène cette eau à la température de vaporisation T_{vap} , puis la vaporise entièrement, et enfin fait passer la température de la vapeur de T_{vap} à $T_2 = 1073 \text{ K}$:

$$\Delta H = Q, \text{ d'où } Q = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = m_0 \left(c_{p,\ell}(T_{vap} - T_1) + \Delta_{vap}H^0 + c_{p,v}(T_2 - T_{vap}) \right) = 3,91 \text{ MJ}.$$

Q36 Notons D_m le débit massique de la lance : $D_m = \mu_{\text{eau}(\ell)} D_V = 8,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Si un tiers de l'eau se vaporise (avec une vapeur qui atteint la température T_2), on a, pour une durée $\Delta t = 1 \text{ s}$:

$$\mathcal{P}_{\text{feu}} = \frac{1}{3} D_m Q = 11 \text{ MW}$$

Une puissance de feu de 1500 MW correspond donc à environ **138 lances !**

Q37 Une lance de débit $500 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ produit donc une masse d'eau égale à $\frac{500}{3} = 167 \text{ kg} \cdot \text{min}^{-1}$ soit, en moles : $n = 9 \cdot 10^3 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$. En exploitant la loi des gaz parfaits sous 1 bar et 800°C , on en déduit le volume de vapeur d'eau produite par minute :

$$V = \frac{nRT}{p} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{min}^{-1}$$

III.B. Lances à incendie

Q38 Si l'on examine la photo, on peut estimer que le jet à droite le plus proche du photographe a une allure comme le dessin ci-contre.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à une goutte d'eau de masse m , dans le référentiel terrestre, considéré galiléen, on a : $m \vec{g} = m \vec{a}$, d'où en projection, et en supposant que la goutte se trouve en O à $t = 0$:

$\ddot{x} = 0$ et $\ddot{z} = -g$. On intègre une première fois : $\dot{x} = V_e \cos \alpha$ et $\dot{z} = -gt + V_e \sin \alpha$. On intègre une seconde fois : $x = V_e t \cos \alpha$ et $z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_e t \sin \alpha$.

On élimine le temps entre les deux : $z = -\frac{g}{2V_e^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$. On cherche la valeur x_{\max} de x rendant z maximal : $\frac{dz}{dx} = 0$ conduit à $\frac{g}{V_e^2 \cos^2 \alpha} x_{\max} = \tan \alpha$, puis à $x_{\max} = \frac{V_e^2}{2g} \sin(2\alpha)$.

Sur la photo, on peut estimer x_{\max} en fonction de la largeur ℓ de Notre-Dame : $x_{\max} = \frac{78}{185} \ell = 20 \text{ m}$. Et j'ai

mesuré $\alpha \approx 43^\circ$. On en déduit $V_e = \sqrt{\frac{2gx_{\max}}{\sin(2\alpha)}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q39 La vitesse moyenne (débitante) de l'eau dans le tuyau est donnée par $V = \frac{Q}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On

constate que V est notablement inférieure à V_e . Cela est très certainement dû au fait que la lance doit être munie d'une **buse de diamètre nettement inférieur à d** pour que l'eau soit éjectée à grande vitesse.

Q40 L'écoulement étant supposé parfait (et bien sûr stationnaire, homogène et incompressible), le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant allant de la sortie de la pompe à l'extrémité de la lance donne (c'est-à-dire juste avant la buse, donc avec une section constante tout le long) :

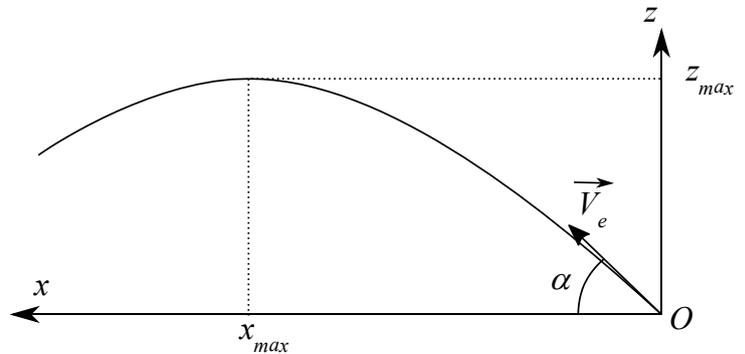
$$P_p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z_p = P_\ell + \rho \frac{V_e^2}{2} + \rho g z_\ell, \text{ d'où } \Delta P = \rho g (z_\ell - z_p) \approx 2,9 \text{ bar}$$

Q41 Evaluons le nombre de Reynolds dans la lance : $\text{Re} = \frac{\rho V d}{\eta} \approx 1,5 \cdot 10^5$

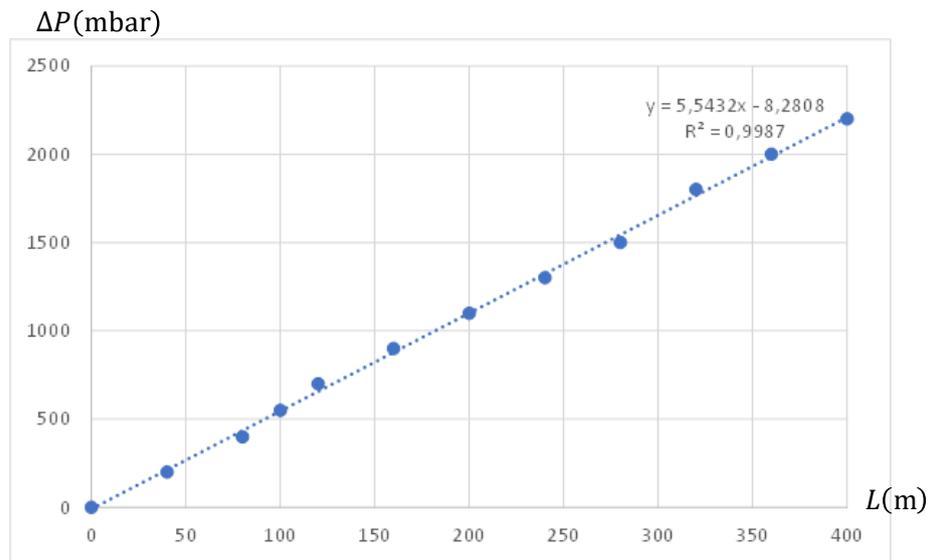
Cette valeur est **très supérieure à 2000 : l'écoulement est largement turbulent.**

Q42 Attention, il y a ici un abus de vocabulaire : la charge est considérée homogène à une pression, alors qu'en toute rigueur, c'est homogène à une distance. On nous parle ici de perte de charge en tant que diminution de pression.

La perte de charge linéique est donc une différence de pression par unité de longueur. Par conséquent, Jd est homogène à une pression. Or, $\frac{\rho V^2}{2}$ est une énergie cinétique volumique, et est donc homogène à une pression (cf théorème de Bernoulli par exemple). On en déduit que **le coefficient f est sans dimension.**



Q43 Le débit étant fixé, la vitesse moyenne V de l'écoulement l'est également. Le diamètre est également fixé. Si le coefficient f est indépendant de la longueur, la perte de charge doit varier linéairement avec la longueur du tuyau. Traçons donc la perte de charge en fonction de la longueur :



On obtient bien sensiblement une droite, par conséquent le coefficient f peut être considéré comme indépendant de la longueur du tuyau.

Q44 Commençons par calculer f . Pour cela, la droite de régression tracée précédemment nous donne la perte de charge linéique J , qui n'est autre que sa pente : $J = 554 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$. On en déduit $f = \frac{2Jd}{\rho V^2} = 1,65 \cdot 10^{-2}$.

La formule de Colebrook nous donne, avec le nouveau Reynolds fourni :

$$\frac{\varepsilon}{d} = 3,7 \times \left(-\frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{f}} + 10^{-\frac{1}{2\sqrt{f}}} \right) = 3,3 \cdot 10^{-4}$$

Les aspérités ont donc une hauteur moyenne $\varepsilon = 23 \text{ } \mu\text{m}$. On peut dire que le tuyau est « peu rugueux ».

Q45 Il faut ajouter à la valeur trouvée à la question Q40 la perte de charge égale à 1,1 bar d'après le tableau. Au total, il faut donc appliquer une surpression $\Delta P = 4,0 \text{ bar}$.

Q46 Si la section est la même tout le long : à l'entrée de la pompe, et de sa sortie jusqu'à l'extrémité de la lance, l'énergie mécanique volumique avant la pompe est :

$$e_{mve} = P_e + \frac{1}{2}\rho V^2.$$

$$\text{À la sortie de la pompe, elle est } e_{mvs} = P_s + \frac{1}{2}\rho V^2.$$

$$\text{À l'extrémité de la lance, elle vaut, en notant } h \text{ l'altitude : } e_{mv\ell} = P_\ell + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh.$$

$$\text{On a donc } e_{mv\ell} = e_{mvs} - JL.$$

$$\text{La puissance mécanique que doit fournir la pompe est } \mathcal{P}_{\text{méca}} = Q \times (e_{mvs} - e_{mve}),$$

$$\text{D'où } \mathcal{P}_{\text{méca}} = Q \times \left(P_\ell + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh + JL - P_e - \frac{1}{2}\rho V^2 \right) = \boxed{Q \times (P_\ell - P_e + \rho gh + JL)}$$

$$\text{Numériquement, } \mathcal{P}_{\text{méca}} = \frac{0,5}{60} \times (6 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,8 \times 30 + 1,1 \cdot 10^5) = 7,5 \text{ kW}.$$

La puissance électrique s'obtient alors en prenant en compte le rendement du moteur électrique et celui de

$$\text{la pompe : } \boxed{\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta_{\text{mot}}\eta_{\text{pomp}}} \simeq 15 \text{ kW}}.$$

Q47 Si chacune des 18 lances a été utilisée à son débit de $500 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ pendant 2 heures (ce que je crois comprendre), le volume d'eau liquide déversé sur Notre-Dame vaut : $V = 18 \times Q \times \Delta t = 10^3 \text{ m}^3$.