

# CORRIGE CENTRALE PC I 2023

## Améliorations des performances en cyclisme

Corrigé rédigé par Nicole ADLOFF ([nicole.adloff@gmail.com](mailto:nicole.adloff@gmail.com)) et Marc STRUBEL ([marc.strubel@wanadoo.fr](mailto:marc.strubel@wanadoo.fr)).

Merci à J.M. Biansan pour ses remarques. N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et commentaires !

Ce corrigé peut (doit ?) être distribué à vos élèves dès 2023.

### I. Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

#### I.A - Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

##### I.A.1) Étude de la phase de démarrage

Q1. Le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$  caractérise la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent). Avec L une distance caractéristique des variations de v.

Prenons L = 0,5 m (largeur d'épaule) :  $Re = \frac{1,225 \cdot \frac{40}{3,6} \cdot 1,8}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5$ .

On est dans l'intervalle proposé, on pourra donc supposer le modèle adapté.

Q2. Bilan des actions sur le système cycliste + vélo :  $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}_r$ ,  $\vec{F}_N$

On applique le théorème du centre de masse au système cycliste + vélo :

Projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \mu_r N - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

Projection sur Oy

$$0 = mg \cos \alpha - N$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\rho S C_x}{2m} = \frac{1,225 \cdot 0,30}{2 \cdot 80} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}; \quad b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 9,8(\sin 0,1 - 6,4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0,1) = 0,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q3. En régime permanent  $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où

$$v_{\text{lim}}^2 = b/a = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho S C_x}$$
$$K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho}$$

Q4.  $v_{\text{lim}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{0,92/2,3 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  plutôt rapide mais plausible.

Q5. Lignes 1 et 2 : importation des bibliothèques.

Ligne 3 à 7 : définit une fonction r ayant comme arguments f, v et t.

L'argument t est la liste des instants successifs, v est la vitesse initiale, et f l'accélération.

Cette fonction renvoie la liste des vitesses V aux instants successifs de la liste t à partir de la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle (I.1) discrétisée.

Lignes 8 et 9 : Renvoie F/m = 0,92 - 2,2 · 10<sup>-3</sup> v<sup>2</sup> fonction trouvée en Q2

Ligne 10 définit une liste des temps

Ligne11 : calcule la liste des vitesses avec les données de l'exercice.  
Lignes12 et 13 : tracé du graphe v(t)

Q6. Le vecteur x est un array numpy qui contient 1000 valeurs du temps également réparties entre 0 et 120 (secondes)

Courbe 1 : échantillonnage correct, correspond à la courbe cherchée,  $v_{lim} = 20 \text{ m.s}^{-1}$

Courbe 2 : échantillonnage 100 fois plus faible que le précédent, on obtient une courbe affine de 12 morceaux,

Courbe 3 : échantillonnage correct, mais un intervalle de temps 10 fois plus faible que celui de la courbe 1, la vitesse limite n'est pas atteinte.

Courbe 4 : échantillonnage trop faible, courbe à 10 segments, intervalle de temps plus important, sur le 1<sup>er</sup> segment la vitesse finale est supérieure à la vitesse limite, donc sur le 2<sup>e</sup> segment l'accélération est négative, d'où la courbe en dents de scie. La méthode d'Euler ne converge pas.

Q7.  $L_{RP} = \int_0^{t_f} v(t)dt$  où  $t_f$  est environ égal à 40 s si on se place à 95% de  $v_{lim}$ , soit  $v = 19 \text{ m.s}^{-1}$ .

En assimilant l'accélération en régime transitoire à une constante d'après la courbe 3

$$V = a*t; L_{RP} = a*t_f^2 / 2 = (10/12)*40^2/2 = 670 \text{ m}$$

Cette valeur surestime LRP, c'est un majorant.

On peut calculer un minorant en assimilant la courbe 1 à une courbe affine entre les points  $t = 0, v = 0$  et  $t = 40\text{s}, v = 38 \text{ m.s}^{-1}$ .

On a alors :  $L_{RP} = 40*19/2 = 380 \text{ m}$ .

Q8. def LRP(v,t):

L=0

i=0

while v[i]<.95\*v[-1]: #v[-1] est la vitesse limite.

L+=v[i+1]\*(t[i+1]-t[i])

i+=1

return L

Remarque : ce script suppose que la vitesse limite est atteinte ! Avec les valeurs du texte, il calcule :  $L_{RP} = 506 \text{ m}$  pour 95 % de  $V_{limite}$ . C'est à peu près la moyenne des deux valeurs que nous avons à la question précédente.

### I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

Q9. Sur le tableur de la calculatrice pour chaque valeur de  $T_c$  pour le casque classique il faut calculer  $v_c = L' / T_c$  ; résultats affichés  $\langle v_c \rangle = 18,526 \text{ m.s}^{-1}$  et l'écart-type affiché est  $\sigma_v = 0,1143 \text{ m.s}^{-1}$  d'où :

$$u(\langle v_c \rangle) = \sigma_v / \sqrt{10} = 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{soit } \langle v_c \rangle = 18,526 \pm 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

Q10. Les histogrammes donnés peuvent être approximés à une gaussienne de valeur centrale 18,5 pour le casque classique et de demi-largeur à mi-hauteur  $(18,7-18,4)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$ , proche de l'incertitude type calculée précédemment sur une mesure.

Remarque : en toute rigueur, la largeur à mi-hauteur d'une gaussienne est liée à l'écart type par :

$$\Delta v = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma \approx 2,36 \sigma$$

Les étudiants doivent-ils savoir cela ?

Pour le casque profilé la valeur centrale est 19,3 et a largeur à mi-hauteur  $(19,4-19,1)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui correspond à une valeur de l'incertitude-type  $u(\langle v \rangle) = 0,15/10^{0,5} = 0,047 \text{ m.s}^{-1}$ , proche de la valeur donnée dans l'énoncé.

Conclusion : La démarche expérimentale est pertinente, que l'incertitude type soit évaluée comme de type A ou de type B, car l'écart entre les deux valeurs moyennes  $19,25-18,53=0,72 \text{ m.s}^{-1}$  est plus de 15 fois plus élevé que la plus grande des incertitudes type sur la moyenne, ce qui valide la démarche expérimentale.

*Remarque : on ne comprend pas bien ce que demande cette question : doit-on vérifier que la variabilité observée expérimentalement est cohérente avec la simulation, ou que l'écart entre les deux valeurs de vitesse est significatif ?*

$$Q11. AN K = b*2m/\rho = 0,916*2*80/1,225 = 119,6 \text{ m}^4.\text{s}^{-2}.$$

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
```

```
def MonteCarlo2(
    vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
    incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
    N:int, # nombre d'échantillons à produire
    K:float, # constante dans vlim
) -> [float]: # tableau de N valeurs de SCx simulées
    generateur = rd.default_rng()
    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N)#on génère les valeurs de v
    SCx = K/V**2
    return (np.mean(SCx),np.std(SCx))
```

```
print(MonteCarlo2( 18.52 , 0.041 , 10000 , 119.6))
print(MonteCarlo2(19.25, 0.036, 10000, 119.6))
```

Réponse de la console :

```
(0.3484668177681698, 0.0013612509872095047)
(0.32275327064773107, 0.0013836612783945698)
```

D'où  $SCx(\text{classique}) = 0,3484 \pm 0,0013 \text{ m}^2$   
 $SCx(\text{profilé}) = 0,3227 \pm 0,0014 \text{ m}^2$

Je ne trouve pas les mêmes résultats que l'énoncé.

Q12 : Puissance du poids  $P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv\sin\alpha;$   
 Puissance de  $\vec{N}$   $P_N = 0$  (perpendiculaire au mouvement)  
 Puissance de  $\vec{F}_r$   $P_r = -\mu_r mg\cos\alpha.v$   
 Puissance de  $\vec{F}_T$   $P_T = \frac{1}{2} \rho SC_x v^3$

Q13. Le gain en puissance n'est pas défini ; disons qu'il s'agit de calculer pour la vitesse donnée, constante, la différence relative :

$$G = [P_T(\text{classique}) - P_T(\text{profilé})]*100 / P_T(\text{classique})$$

$$= [SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})]*100 / SC_x(\text{classique})$$

$$= [0,3484 - 0,3227]*100 / 0,3484 = 7,4 \%$$

Le « gain en puissance » du au casque profilé est 7,4 % , cohérent avec les 2 à 8% de l'introduction.

Cette valeur n'a en réalité pas de sens, puisque la valeur de  $SC_x$  ne dépend pas uniquement du casque, mais également de la vitesse (cf courbe de  $C_x$  pour une balle, seule au programme de PC).

Faut-il supposer que les valeurs du tableau 2 donnent des valeurs de Scx à même vitesse ?

Pour l'incertitude type sur ce résultat, on fait une composition des incertitudes :

$$\frac{u(G)}{G} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{u(SCx(classique))^2 + u(SCx(profilé))^2}}{SCx(classique) - SCx(profilé)}\right)^2 + \left(\frac{u(SCx(classique))}{SCx(classique)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{0,0036^2 + 0,0037^2}}{0,3051 - 0,2937}\right)^2 + \left(\frac{0,0036}{0,3051}\right)^2} = 0,45$$

L'incertitude type est donc de 45 %, ce qui rend le résultat plus que douteux.

Q14. On suppose que la densité de courant  $\vec{j}_{el}$  dans le plasma est due uniquement au mouvement des électrons,  $\vec{j}_{el} = -ne\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse des électrons déduite du pfd en supposant que l'électron n'est soumis qu'à la partie électrique de la force de Lorentz.

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \text{ soit en notation complexe } i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \text{ d'où } \underline{\vec{j}}_{el} = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \underline{\vec{E}} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}} \text{ d'après la loi d'Ohm locale}$$

$$\text{d'où } \underline{\sigma} = -i \frac{ne^2}{\omega m_e} = -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{ en identifiant à l'expression donnée on exprime } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}.$$

Q15. A partir des équations de Maxwell dans le plasma et  $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

MG  $\text{div}\vec{E} = 0$  plasma neutre

$$\text{MF } \overrightarrow{rot}\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{MA } \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{el} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient  $\Delta\vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_{el}}{\partial t}$  équation linéaire pouvant s'écrire en complexe

Avec  $\underline{\vec{E}}(z, t) = \underline{E}_x(z, t) \underline{e}_x$  et  $\underline{\vec{j}}_{el} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$  :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_x(z, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{E}_x(z, t)}{\partial t}$$

Q16 Relation de dispersion à partir de  $\underline{E}_x(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t + kz))$  et  $\underline{\sigma} = -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$  en remplaçant dans

l'équation précédente :  $(ik)^2 = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 + \mu_0 \left(-i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}\right) i\omega$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Le plasma est dit transparent lorsque l'onde peut se propager sans atténuation, c'est-à-dire lorsque  $\underline{k}^2$  est un réel positif. Il faut donc  $\omega > \omega_p$

$$\text{Q17 Déterminons la valeur de } f_p = \omega_p / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}} = \frac{1}{2\pi} * 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{10^{12}}{8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 8,95 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$f_p \approx 9 \text{ MHz} \ll \nu_1 = 1575,4 \text{ MHz}$  et  $\nu_2 = 1227,6 \text{ MHz}$ .

Le plasma est donc transparent pour le paquet d'onde envoyé.

$$\text{Q18 Vitesse de phase : } V_\phi = \omega/k = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Q19 Vitesse de groupe, c'est la vitesse de propagation du paquet d'onde,  $V_g = d\omega/dk$

$$\text{En différenciant } k^2 : 2kdk = 2\omega d\omega/c^2 \quad V_g = c^2 k/\omega = c^2 / V_\phi = c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

Q20 Tracés classiques, cf cours.

Les fréquences des signaux GPS étant très supérieures à la fréquence de coupure du plasma on peut approximer  $V_\phi$  et  $V_g$  à  $c$  : le plasma se comporte comme du vide.

Q21 D'après la relation de MF  $\vec{rot}\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  ou  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  en utilisant la dérivation formelle avec  $\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x = E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x$   $i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$  soit

$$\vec{B} = -\frac{-k\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y$$

Dans la force de Lorentz, on a négligé  $(-e)\vec{v} \wedge \vec{B}$  devant  $(-e)\vec{E}$  or  $\frac{||\vec{v} \wedge \vec{B}||}{||\vec{E}||} = \frac{vE_0/c}{E_0} = \frac{v}{c} \ll 1$  pour un électron non relativiste ce qui justifie l'approximation faite.

Q22 Soit  $\tau$  le retard ionosphérique défini par  $\tau = t_{\text{plasma}} - t_{\text{vide}} = d(1/V_g - 1/c)$  où  $d$  est la distance parcourue dans le plasma.

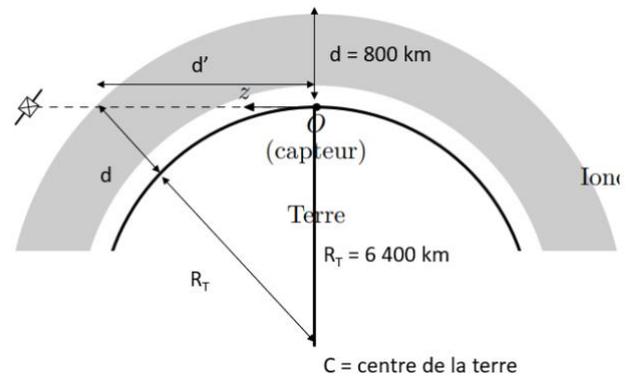
$$\tau = \frac{d}{c} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} - 1 \right) = \frac{d}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} - 1 \right) = \frac{d}{2c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

en effectuant en DL car  $\omega_p \ll \omega$

Q23 On pose  $\tau' = \frac{d' \omega_p^2}{2c \omega^2}$  avec  $d'$  identifié sur le schéma

$$d' = \sqrt{(R_T + d)^2 - R_T^2} \cong \sqrt{2dR_T} = 3200 \text{ km}$$

$$\tau' = \frac{d'}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{f_P}{v_2} \right)^2 = \frac{3200 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} \left( \frac{8,95}{1227,6} \right)^2 = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$



Sera le retard maximum subit à la traversée de l'ionosphère.

Q24 Soit  $d_1 = ct$  la distance satellite sol lorsque l'onde qu'on confond  $V_g$  et  $c$  dans l'ionosphère.

Soit  $d_2 = c(t - t_{\text{plasma}}) + V_g t_{\text{plasma}}$  la distance satellite sol lorsque la vitesse de l'onde est  $V_g$  la vitesse de groupe,  $t_{\text{plasma}}$  est la durée mise pour traverser l'ionosphère.

$$d_1 - d_2 = (c - V_g) \cdot t_{\text{plasma}} = (c - V_g) \cdot d/V_g = dc(1/V_g - 1/c) = c\tau' = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,8 \cdot 10^{-7} = 85 \text{ m}$$

Ce résultat paraît cohérent.

Q25 D'après l'énoncé le décalage maximal au sol est le produit de la valeur maximale du DOP et du décalage maximal de la distance capteur-satellite.

Sur la figure 8 au lit  $DOP_{\text{Max}} = 1,10$  d'où le décalage max =  $1,10 \cdot 85 = 94 \text{ m}$

En utilisant la relation donnée :

Évaluation de type B :

Si la grandeur mesurée  $y$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , l'incertitude-type est alors

$$u(y) = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}$$

En supposant que le DOP suit une loi de distribution uniforme sur  $[0,67 ; 1,10]$ , on a :

$$\delta_{\text{Max}} \in [0,67 \cdot 84,9 = 56,9 ; 93,5]$$

$$u(\delta_{\text{Max}}) = (93,5 - 56,9) / 2\sqrt{3} = 11 \text{ m}$$

Soit une erreur relative de positionnement de 12 % quand même...

Q26 Pour un essai, on a deux incertitudes, l'une sur la position de départ et l'autre sur celle d'arrivée, donc  $u(L') = \sqrt{2}u(\delta_{\text{max}})$  :

On calcule :

$$\frac{u(v)}{v} = \frac{u(L')}{L'} = \frac{11\sqrt{2}}{5000} = 0,31 \%$$

Cette incertitude est négligeable par rapport à celle que nous avons sur une valeur de la vitesse.