CCINP 2023 - Physique
corrigé

N'hésitez pas à me contacter (yohan.poirier@ac-poitiers.fr) pour toute remarque concernant ce corrigé.

I. Gomu no jet pistol : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I.1. Oscillateur harmonique

1. La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$V'(x_{eq}) = 0$$

$$V_0 a e^{-a(x_{eq}-x_0)}\left(1 - e^{-a(x_{eq}-x_0)}\right)) = 0$$

$$\boxed{x_{eq} = x_0}$$

Il s'agit nécessairement d'un minimum car $V(x) \geq 0$ et $V(x_{eq}) = 0$.

2. Avec le changement de variable proposé :

$$V(x) = V_0\left(1 - e^{-a\varepsilon}\right)^2$$

Un développement limité au second ordre en ε donne :

$$V(x) = V_0 a^2 \varepsilon^2$$

On obtient bien une énergie potentielle de la même forme que celle associée à un ressort :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}k\varepsilon^2}$$

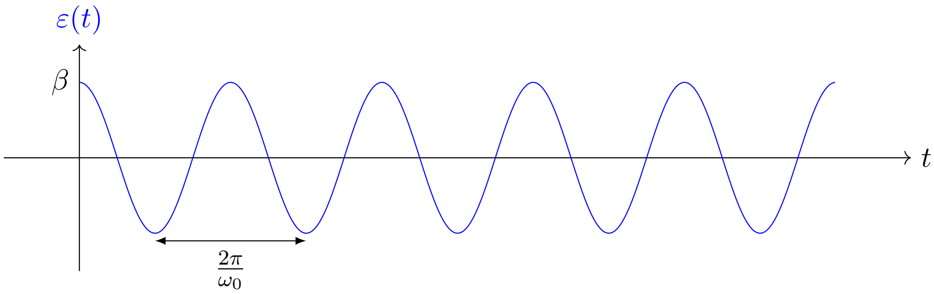
avec $\boxed{k = 2a^2 V_0}$.

3. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la particule de masse m dans un référentiel galiléen, donne l'équation différentielle :

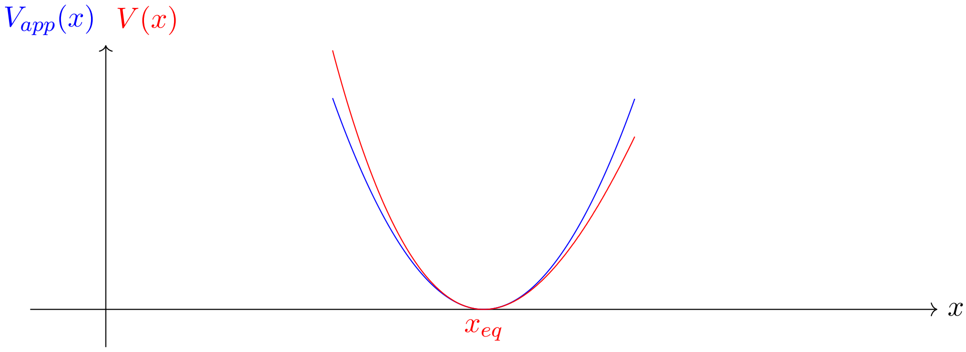
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0$$

On identifie donc la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
La résolution de cette équation donne :

$$\varepsilon(t) = \beta\cos(\omega_0 t)$$



4. Dans le graphique suivant, $V(x)$ et $V_{app}(x)$ désignent respectivement le potentiel de Morse et son expression approchée.



I.2. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

5. A l'équilibre, les atomes sont séparés d'une distance a et le choix de l'origine impose $x_n(0) = 0$ donc $\boxed{x_n(0) = na}$. On en déduit $\boxed{u_n(t) = x_n(t) - na}$.
6. La masse d'indice n subit deux forces de rappel de la part :
   — du ressort situé à sa gauche et de longueur $l_g = x_n(t) - x_{n-1}(t)$,
   — du ressort situé à sa droite et de longueur $l_f = x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

   Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse d'indice n dans un référentiel galiléen, donne :

$$m\ddot{x}_n(t) = -k(l_g - l_0) + k(l_d - l_0)$$

   On retrouve bien la forme proposée :

$$\ddot{u}_n(t) = \frac{k}{m}\left[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right]$$

   avec $\boxed{\alpha = 2}$.
7. Il s'agit bien d'une onde harmonique puisqu'elle évolue temporellement de façon sinusoïdale. U_0 représente l'amplitude de l'onde et ω sa pulsation.
8. La fonction $\exp(ix)$ est 2π-périodique donc la longueur d'onde doit vérifier :

$$\omega t - q(na + \lambda) = \omega t - qna + 2\pi$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{q}}$$

   q correspond donc à la norme du vecteur d'onde.

9. En injectant la solution proposée dans l'équation différentielle obtenue précédemment on obtient :

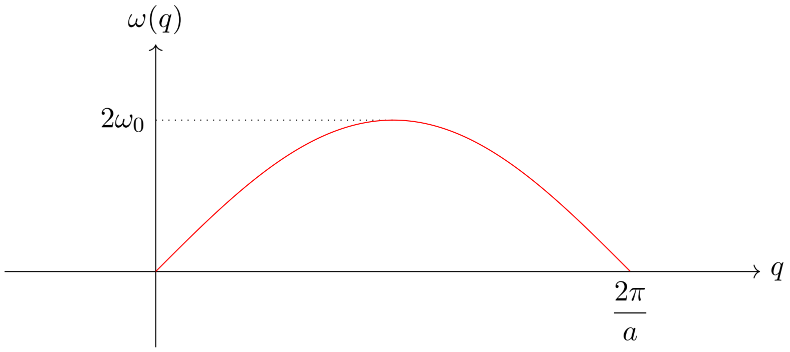
$$-\omega^2 U_0 e^{i(\omega t - qna)} = \omega_0^2 \left[U_0 e^{i(\omega t - q(n+1)a)} + U_0 e^{i(\omega t - q(n-1)a)} - 2U_0 e^{i(\omega t - qna)}\right]$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[2 - e^{iqa} - e^{-iqa}\right]$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos(qa)\right]$$

Avec le formulaire de trigonométrie en fin d'énoncé, on retrouve bien l'expression demandée :

$$\boxed{\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}$$



10. La vitesse de phase, $v_\phi = \frac{\omega}{q}$ correspond à la vitesse de propagation d'une onde monochromatique.

La vitesse de groupe, $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}q}$ correspond à la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde quasi-monochromatique.

Graphiquement, la vitesse de groupe correspond, pour une valeur de q donnée, à la pente de la courbe en ce point. La vitesse de phase correspond à la pente que fait la droite reliant ce point à l'origine du graphique.

11. La pulsation ω et la norme du vecteur d'onde q ne sont pas proportionnels donc la vitesse de phase dépend de la pulsation : le milieu est donc <u>dispersif</u>.

On remarque que :

$$\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \geq 1$$

La pulsation doit donc respecter la condition :

$$\boxed{\omega \leq 2\omega_0}$$

Il s'agit donc d'un <u>filtre passe-bas</u>.

12. Pour $q \ll \frac{\pi}{a}$, un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{qa}{2}$ donne :

$$\omega^2 = \omega_0^2 q^2 a^2$$

$$\omega = \omega_0 q a$$

Donc :

$$\boxed{v_\phi = v_g = \omega_0 a}$$

Pour les faibles pulsation, le milieu devient donc <u>non-dispersif</u>.

Pour $q = \frac{\pi}{a}$:

$$\boxed{v_\phi = \frac{2\omega_0 a}{\pi}}$$

De plus, pour cette valeur, la pulsation atteint un extremum donc :

$$\boxed{v_g = 0}$$

Il s'agit donc d'une onde stationnaire.

I.3. Solide cristallin

13. Le terme $-\frac{B}{x^6}$ correspond aux interactions attractives de Van der Waals prépondérantes à grande distance. Le terme $\frac{A}{x^{12}}$ correspond à des interactions répulsives entre les nuages électroniques des particules prépondérantes à courte distance.
14. Par identification

$$\begin{cases} \Theta_0 a^{12} = A \\ 2\Theta_0 a^6 = B \end{cases}$$

On retrouve donc bien la forme demandée avec :

$$\boxed{\begin{cases} a = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}} \\ \Theta_0 = \frac{B}{2a^6} \end{cases}}$$

15. Courbe 1 : $f_1 : \frac{x}{a} \to \frac{V(x)}{\Theta_0}$ car $f_1(1) = -1$.
Courbe 2 : $f_2 : \frac{x}{a} \to \left(\frac{a}{x}\right)^{12}$ car $f_2(1) = 1$.
Courbe 3 : $f_2 : \frac{x}{a} \to 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}$ car $f_3(1) = 2$.
16. On pose ε tel que $x = a(1+\varepsilon)$:

$$V(\varepsilon) = \Theta_0 \left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^{12})} - \frac{2}{(1+\varepsilon)^{6})}\right]$$

Pour $\varepsilon \ll 1$, un développement limité en 0 à l'ordre 2 en ε donne :

$$V(\varepsilon) = \Theta_0 \left[-1 + 36\varepsilon^2\right]$$

$$V(x) = \frac{\Theta_0}{a^2}\left[-a^2 + 36(x-a)^2\right]$$

On obtient bien la même forme que l'énergie potentielle associée à un ressort avec, par identification :

$$\boxed{k = 72\frac{\Theta_0}{a^2}}$$

17. Applications numériques :

$$\boxed{k = 2{,}9 \times 10^1\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 1{,}7 \times 10^{13}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$$

18. Le déplacement, en notation réelle, s'écrit pour la masse d'indice n :

$$u_n(t) = U_0 \cos(\omega t - qna)$$

La vitesse s'écrit donc :

$$\dot{u}_n(t) = -\omega U_0 \sin(\omega t - qna)$$

Et donc l'énergie cinétique :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 U_0^2 \sin^2(\omega t - qna)$$

Soit en moyenne :

$$< E_c >= \frac{1}{4} m\omega^2 U_0^2$$

Donc pour N atomes :

$$\boxed{< E_{c,N} >= \frac{1}{4} N m\omega^2 U_0^2}$$

19. En tenant compte des ressorts de part et d'autre de l'atome, l'énergie potentielle de l'atome d'indice n s'écrit :

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k(u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 + \frac{1}{2} k(u_n(t) - u_{n-1}(t))^2$$

En utilisant la notation complexe :

$$< (u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 >= \frac{1}{2} Re((\underline{u_{n+1}(t)} - \underline{u_n(t)})(\underline{u_{n+1}^*(t)} - \underline{u_n^*(t)})$$

$$< (u_{n+1}(t) - u_n(t))^2 >= \frac{1}{2} |\underline{u_{n+1}(t)} - \underline{u_n(t)}|^2$$

Finalement :

$$\boxed{< E_p >= \frac{1}{4} k \left(|\underline{u_{n+1}(t)} - \underline{u_n(t)}|^2 + |\underline{u_n(t)} - \underline{u_{n-1}(t)}|^2 \right)}$$

L'expression proposée par l'énoncé comporte donc deux erreurs :
— une erreur de signe,
— u_{n-1} au lieu de $\underline{u_{n-1}}$.

Par exemple, pour $q = \frac{\pi}{a}$, l'expression proposée donne une énergie potentielle nulle en moyenne, ce qui n'est pas cohérent avec les résultats qui suivent.

20. Avec la forme de l'onde :

$$|\underline{u_{n+1}(t)} - \underline{u_n(t)}| = U_0 |e^{i(\omega t - q(n+1)a)} - e^{i(\omega t - qna)}| = U_0 |e^{i(\omega t - qa(n+\frac{1}{2}))}||e^{-iq\frac{a}{2}} - e^{+iq\frac{a}{2}}|$$

$$|\underline{u_{n+1}(t)} - \underline{u_n(t)}| = 2U_0 \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|$$

Donc :

$$< E_p >= 2kU_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

Avec la relation de dispersion :

$$\boxed{< E_p >= \frac{1}{2} m\omega^2 U_0^2}$$

21. On en déduit l'énergie interne du cristal :

$$U = \frac{N}{2} < E_p > + N < E_c >$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} N m\omega^2 U_0^2}$$

Le terme $\frac{N}{2}$ tient compte du fait que l'énergie potentielle calculée précédemment est associée à deux interactions interatomiques.