

Physique

Capacité numérique 4 – Champ de force centrale conservatif

Pour le mercredi 10 avril 10:00

Objectifs

- ☞ À l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
- ☞ Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`.
- Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.

1 Étude préliminaire

0 point

Commençons par étudier le mouvement d'un point matériel de masse m soumis au potentiel keplerien

$$E_p(r) = \frac{K}{r} = \frac{km}{r}$$

avec r la distance entre ce point matériel et l'origine du repère.

1. Déterminer l'expression de la force \vec{F} dérivant de ce potentiel.

En utilisant le lien entre énergie potentielle et force associée, en coordonnées sphériques (ou cylindriques, ici),

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r}.$$

2. Quelle est l'expression de K dans le cas du mouvement d'une planète autour du Soleil ?

Pour une planète de masse m autour du Soleil de masse M , $\boxed{K = -\mathcal{G}Mm}$, c'est-à-dire $k = -\mathcal{G}M$.

Dans le cas d'une force centrale, le mouvement est contenu dans un plan défini à tout instant par \overrightarrow{OM} le vecteur position de M le point matériel étudié par rapport à O le centre attracteur et \vec{v} la vitesse de M dans le référentiel lié à O supposé galiléen.

3. Déterminer, en coordonnées cylindriques, les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M .

En coordonnées cylindriques dans le repère $(Or\theta z)$, (Oz) étant orthogonal au plan du mouvement,

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + 0\vec{e}_z, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

4. Déterminer, grâce au principe fondamental de la dynamique, deux équations différentielles régissant le mouvement de ce point matériel.

L'énoncé ayant posé toutes les hypothèses nécessaires, il suffit d'appliquer le PFD,

$$m\vec{a} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

5. Déterminer la fonction F de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ traduisant ces deux équations sous la forme

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}).$$

Il suffit d'isoler les variables en question dans les équations différentielles (1). En effet,

$$F(X) = \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \frac{k}{r^2} + r\dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta} \\ -\frac{2r\dot{\theta}}{r} \end{pmatrix} \Rightarrow F : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{k}{x_1^2} + x_1 x_4^2 \\ x_4 \\ -\frac{2x_2 x_4}{x_1} \end{pmatrix}.$$

2 Mise en œuvre

0 point

La bibliothèque `scipy.integrate` comporte une fonction `odeint` dont la documentation complète est disponible en ligne¹. Pour un système tel que $\frac{dX}{dt} = F(X)$ avec X pouvant être un vecteur, son utilisation peut être simplifiée, avec les lignes nécessaires en amont, en

```
1 from scipy.integrate import odeint # import de la fonction
2 X0 = (theta_init, omega_init) # le vecteur X à l'instant initial, comme avant
3 temps = ... # la liste des instants t auxquels obtenir X(t)
4 X_liste = odeint(F, X0, temps)
```

avec F une fonction qui prend deux paramètres, X et `temps`.

1. Écrire le code définissant la fonction `F1`, prenant comme paramètres la valeur X de $X(t_i)$ et la valeur `t` de t_i et qui rend $F(X(t_i))$ dans le cas étudié précédemment en définissant $k = -1$ dans la fonction `F1`.

```
8 def F1(X, t):
9     k = -1
10    r = X[0]
11    dr_dt = X[1]
12    theta = X[2]
13    omega = X[3]
14    # Application des formules
15    return (dr_dt, k/r**2 + r*omega**2, omega, -2*dr_dt*omega/r)
```

2. Déterminer un jeu de conditions initiales (c'est-à-dire les coordonnées de $X(t = 0)$) pour avoir une trajectoire circulaire de rayon $r = 1$.

Avec une trajectoire circulaire de rayon constant $r = 1$, les équations (1) deviennent


$$\begin{cases} -r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^2} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0, & \dot{\theta} = C^{te} = \sqrt{-\frac{k}{r^3}} = 1. \\ r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de définir $X0 = (1, 0, 0, 1)$.

3. Tracer alors dans le plan du mouvement la trajectoire suivie par le point M . Pour cela, déterminer le temps pour pouvoir fermer la trajectoire, en déduire la variable `temps` à compléter sous la forme :

```
temps = np.linspace(0, ..., 1000)
```

Placer également le point correspondant à O . Sauvegarder le tracé de cette simulation dans une image « `fig1.png` ».

 Pour obtenir des axes « x » et « y » normés, utiliser la ligne

```
| plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
```

juste avant de sauvegarder la figure.

1. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

Pour fermer la trajectoire, il faut tracer au moins une période du mouvement. Avec la troisième loi de Kepler *a priori* vue pour les planètes, il vient

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{-k} \Leftrightarrow T = 2\pi \frac{r^3}{-k} = 2\pi.$$

Le code est donné ci-dessous et le tracé en figure 1. La trajectoire obtenue est bien circulaire et fermée.

```
17 X0 = (1, 0, 0, 1) # conditions initiales pour une trajectoire circulaire
18 temps = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000) # temps pour avoir une période
19
20 # Application de odeint
21 odeint_output = odeint(F1, X0, temps)
22 rs = odeint_output[:,0]
23 thetas = odeint_output[:,2]
24
25 # obtenir x et y pour le tracé
26 xs = rs*np.cos(thetas)
27 ys = rs*np.sin(thetas)
28
29 # réaliser la figure
30 plt.figure()
31 plt.title("Simulation d'une trajectoire circulaire")
32 plt.plot(
33     xs, ys,
34 )
35 plt.scatter(# pour mettre le centre de la figure
36     0, 0,
37     marker = 'o', # faire un 'gros' point
38     color = "black",
39 )
40 plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box') # axes normés
41 plt.savefig("fig1.png")
```

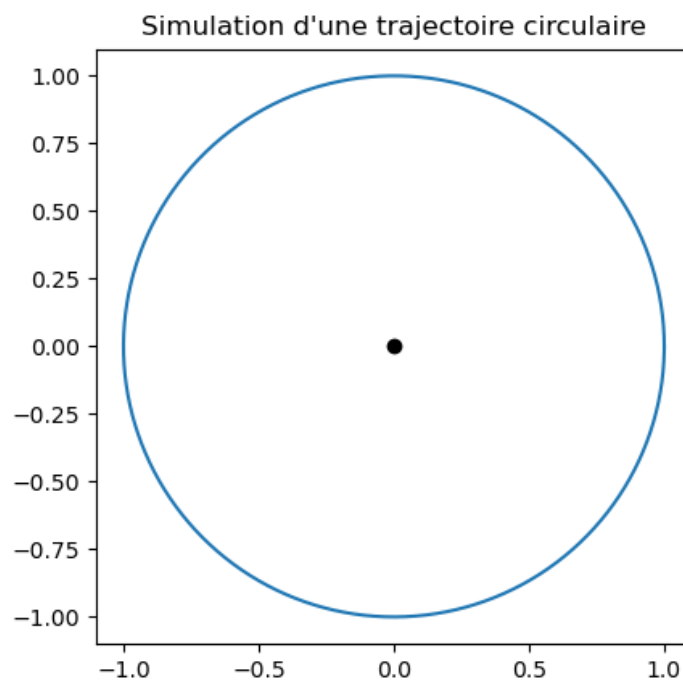


Figure 1 – Le tracé « fig1.png ».

4. Tracer, dans « fig2.png », la trajectoire obtenue avec des conditions initiales similaires, même valeur de r mais une vitesse est diminuée de 10 %.

Dans ce cas, les conditions initiales sont $X_0 = (1, 0, 0, 0.9)$. Le reste du code est le même. Le tracé obtenu est donné en figure 2. La trajectoire est une ellipse, dont le point de départ est ici l'aphélie. La trajectoire circulaire de la figure 1 a été rajoutée en pointillés pour comparer.

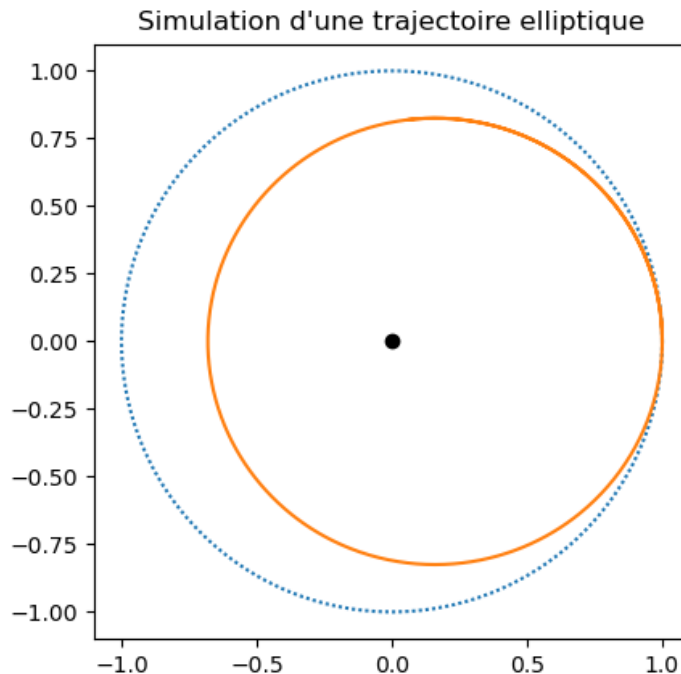


Figure 2 – Le tracé « fig2.png ».

5. Rappeler les expressions des vitesses cosmiques. En déduire la vitesse minimale pour partir à l'infini du point $(1, 0)$ avec une vitesse orthoradiale (selon \vec{e}_θ).

Les vitesses cosmiques sont, dans le cas de l'attraction gravitationnelle par un astre de masse M ,

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{-k}{r}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{-2k}{r}} = \sqrt{2}v_1$$

avec v_1 la vitesse pour être en orbite circulaire de rayon r et v_2 la vitesse de libération depuis un rayon r .

6. Tracer, dans « fig3.png », la trajectoire obtenue pour une vitesse égale à celle de libération. Vérifier que pour une vitesse inférieure, le point matériel reste dans un état lié. Prendre pour cela une vitesse inférieure de 5 % et tracer sur un temps suffisamment long pour voir que la trajectoire est fermée dans ce cas.

Il faut donc comme condition initiale $X_0 = (1, 0, 0, 2**0.5)$. Le reste du code est le même. Pour la vitesse inférieure à 5 %, $X_0 = (1, 0, 0, 2**0.5*0.95)$. Enfin, il faut tracer le tout sur une durée 12 fois plus longue qu'avant pour que la trajectoire elliptique soit fermée. Les tracés obtenus sont donnés en figure 3. La trajectoire elliptique s'étend toutefois, à son aphélie, à presque 10 fois le rayon initial correspondant au périhélie.

3 Potentiel différent

0 point

Considérons à présent, toujours pour un point matériel de masse m , un potentiel de la forme

$$E_p(r) = \begin{cases} mk \ln(r/R), & \text{si } r \in [0,1 R; R] \\ 0, & \text{si } r > R \end{cases}$$

avec k et R des constantes.

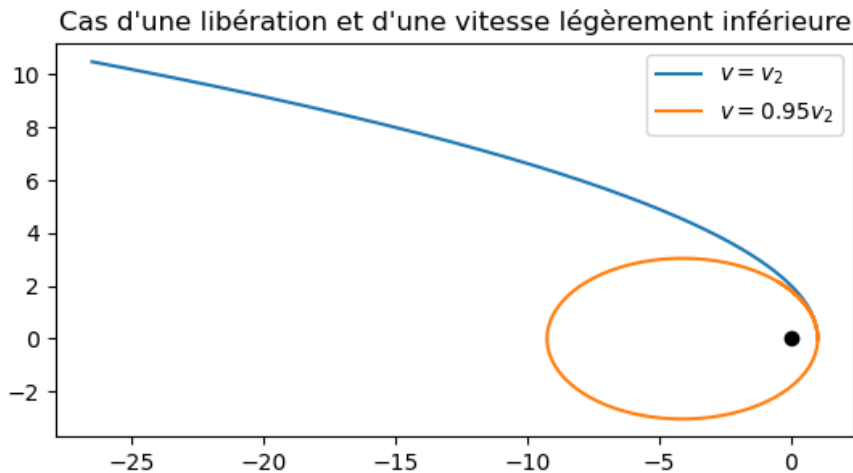


Figure 3 – Le tracé « fig3.png ».

- Déterminer l'expression de la force \vec{F} dérivant de ce potentiel.
En utilisant le lien entre énergie potentielle et force associée, en coordonnées sphériques (ou cylindriques, ici),

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{mk}{r} \vec{e}_r}.$$

- En déduire le code définissant la fonction F2, prenant comme paramètres la valeur X de $X(t_i)$ et la valeur t de t_i et qui rend $F(X(t_i))$ dans le cas étudié ici en définissant $k = +1$ dans la fonction F2.

```

115 def F2(X, t):
116     k = 1
117     r = X[0]
118     dr_dt = X[1]
119     theta = X[2]
120     omega = X[3]
121     # Application des formules
122     return (dr_dt, -k/r + r*omega**2, omega, -2*dr_dt*omega/r)

```

Calculer la vitesse que doit avoir un point matériel pour être en orbite circulaire de rayon r dans ce potentiel. Commenter.

L'orbite étant supposée circulaire,

$$-m \frac{v_{\text{circ}}^2}{r} = -\frac{K}{r} \Rightarrow \boxed{v_{\text{circ}} = \frac{K}{m} = k}.$$

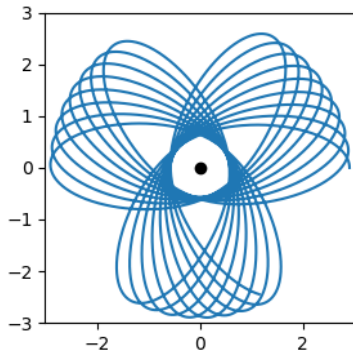
La vitesse nécessaire pour être sur une orbite circulaire est toujours la même, indépendamment de r (ce qui n'est pas le cas pour le potentiel keplerien).

- Pour $k = 1$ et les conditions initiales du tableau 1, tracer dans les figures respectives les trajectoires obtenues. Prendre pour cela `temps = np.linspace(0, 200, 5000)`.

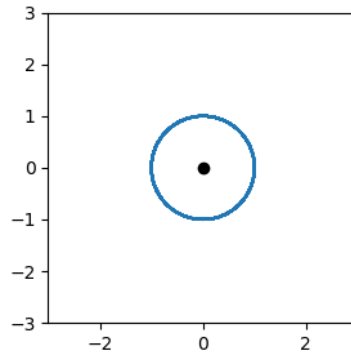
Le code proposé pour ces tracés est donné ci-après. Les tracés obtenus sont donnés en figure 4

Figure	$r(0)$	$\dot{r}(0)$	$\theta(0)$	$\dot{\theta}(0)$
fig4a.png	2,9	0	0	0,125
fig4b.png	1	0	0	1
fig4c.png	2	0	0	0,25

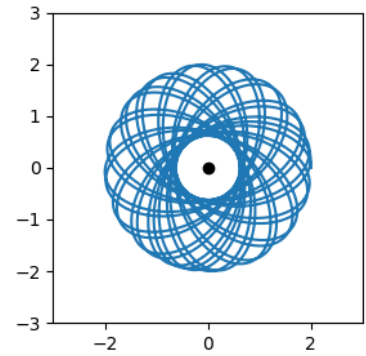
Tableau 1 – Jeux de conditions initiales à utiliser.



(a) Le tracé « fig4a.png ».



(b) Le tracé « fig4b.png ».



(c) Le tracé « fig4c.png ».

Figure 4

4. Commenter en comparant aux trajectoires habituellement obtenues dans le cas du potentiel keplerien.

Mis à part le cas de la figure 4b, circulaire, les trajectoires obtenues ne sont pas fermées. En effet, hormis les potentiels kepleriens (en $1/r$) et harmoniques (en r^2) dont les orbites sont *toujours* fermées, une orbite choisie au hasard dans celles disponibles pour un potentiel quelconque donné n'a que très peu de chance d'être fermée.