Probabilités - Chapitre 2 : variables aléatoires finies

Exercice 1 :

A la sortie d'une usine fabriquant des voitures, il y a 1% de risque que la voiture soit rayée en sortant du parking. On suppose que ce risque est indépendant à chaque sortie de véhicule. Le parking contient 100 voitures. Quelle est la loi du nombre de voitures rayées ? Quelle est la probabilité qu'une seule voiture soit rayée ? Qu'au moins une soit rayée ?

Exercice 2 : Quizz loi

Donner la loi de X dans chacun des cas suivants, sans refaire les calculs. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champs paissent 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champs. X est le nombre de bosses.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.
5. Aux dernières élections, une proportion p d'individus s'est abstenue. On interroge une personne au hasard dans la rue. X vaut 0 si la personne n'a pas voté, 1 si elle est a voté.

   Même situation, mais on interroge 100 personnes. X est le nombre de votants.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A et B deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on suppose que les variables sont indépendantes.

On note Y le maximum de A et B et Z le minimum.

1. Calculez pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la probabilité $P(Y \leq k)$
2. En déduire la loi de Y.
3. A partir du calcul de $P(Z \geq k)$, déterminez la loi de Z.

Exercice 4 :

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la même couleur que celle qui vient d'être tirée. On note X_n la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminez la loi de X_1, de X_2 et de X_3.
2. Quelle conjecture pouvez vous faire pour la loi de X_n ? Démontrez cette conjecture.

Exercice 5 :

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 est truqué pour que la probabilité d'apparition d'une face soit proportionnelle à la valeur indiquée. On lance ce dé. Soit X la variable aléatoire donnant le numero de la face obtenue. Déterminez la loi de X et son espérance.

Exercice 6 :

Un dé à 6 faces équilibré a une face marquée 1, deux marquées 2, deux marquées 3 et une marquée 4. Soit X la variable aléatoire donnant la face obtenue lors d'un lancer.

1. Déterminez la loi de X et calculez $E(X)$ et $V(X)$.
2. Calculez $E(\frac{1}{X})$ et $E(\ln(X))$.

Exercice 7 :

Soit A une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 4$

1. Calculer $E(A)$ et $\text{Var}(A)$
2. Soit $V = A^2$, $W = A^2 + 1$ et $Z = (A - 3)^2$. Déterminer l'espérance de V, W et Z avec un minimum de calcul. Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

Exercice 8 :

Un joueur de fléchettes vise une cible de 10 cm de rayon qui comporte dix couronnes concentriques délimitées par des cercles de rayons 1,2,. . . , 10 cm. Les couronnes rapportent des points de allant de 1 à 10, 10 étant pour la couronne au centre de la cible (donc un disque de rayon 1 cm). On suppose que le joueur ne rate jamais la cible et que la probabilité qu'il atteigne une couronne est proportionnelle à l'aire de celle ci.

1. On modélise par X le nombre de point obtenus. Déterminez la loi de X et son espérance.
2. Tracer sa fonction de répartition et son diagramme en bâton.
3. Si le joueur atteint une couronne numeroté k, avec $6 \leq k \leq 10$, il gagne k euros. Si il échoue, il doit payer 1 euros. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 9 :

Un chapeau magique contient $n - 1$ lapins blancs et un lapin noir. On procède à l'extraction sans remise des lapins, jusqu'à ce qu'il n'en ait plus dans le chapeau. Soit X le rang de l'extraction du lapin noir. Déterminez la loi de X, son espérance et calculez sa variance.

Exercice 10 :

Ne disposant pas de moyen simple pour reconnaitre ses clés, un professeur de mathématiques doit essayer au hasard parmi ses 10 clés pour ouvrir la porte de sa salle. On note X le nombre d'essais avant que la porte soit ouverte (y compris l'essai concluant).

1. Déterminez la loi de X et son espérance dans le cas où le professeur n'essaie pas deux fois la même clé.
2. On suppose que le professeur n'est pas bien réveillé et peut essayer plusieurs fois la même clé (y compris deux fois de suite...). On suppose également que au bout d'un nombre fixé $n \in \mathbb{N}^*$ d'essais, il se résout à appeler à l'aide et se fait ouvrir par un agent de service.
   (a) Déterminez la loi de X et son espérance en fonction de n.
   (b) Calculez la limite lorsque $n \to +\infty$ de cette espérance.
3. On suppose $n \to +\infty$. Le professeur est mal réveillé une fois sur 4. Ce matin, après 5 essais, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte de la salle. Calculez la probabilité qu'il ne soit pas bien réveillé.

Exercice 11 :

Un standard téléphonique appelle successivement et indépendamment n clients ($n \in \mathbb{N}^*$) qui ont tous la même probabilité p de répondre à l'appel. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients qui ont répondu.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Le standard procède à un second appel pour joindre les $n - X$ clients qui n'ont pas répondu au premier appel. Soit Y la variable correspond au nombre de clients qui répondent à ce deuxième appel.
   (a) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, quel est la loi de Y sachant l'événement $(X = i)$? En déduire la loi du couple (X, Y).
   (b) Soit $Z = X + Y$. A quoi correspond Z ?
   (c) Montrez que pour tout $i, j \in [\![0, n]\!]$,
   $$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$$
   (d) Déterminez la loi (vous devez obtenir une loi usuelle).

Exercice 12 :

Quatre cartes numerotées de 1 à 4 sont posées faces cachées sur une table. On retourne deux cartes simultanément au hasard, et on note X le plus petit numero tiré et Y le plus grand.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
3. En déduire la loi de $X + Y$.

Exercice 13 :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

1. Déterminez la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.
2. Montrez que $E(XY) = E(X)E(Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$.
On pose
$$Y = 2n + 1 - X \text{ et } Z = \min(X, Y)$$

1. Montrez que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $(Z > k) = (k < X \leq 2n - k)$
2. Déterminez la loi de Z.

Exercice 15 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soient T une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et Y une v.a. à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $P(Y=1)=p$. On suppose que T et Y sont indépendantes et on pose $X = T - n$ et $Z = XY$.

1. Les v.a. X et T sont-elles indépendantes ? Et X et Y ?
2. Déterminez $Z(\Omega)$ et exprimez la loi de Z en fonction de celles de X et de Y.
3. En déduire que X et Z ont même loi. Sont-elles indépendantes ?
4. Calculez l'espérance de Z.

Exercice 16 :

On dispose de 6 urnes, numérotées $U_1, U_2, \dots U_6$, telles que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k.

On lance un dé à 6 faces équilibré, et on note X le nombre obtenu. On choisit alors l'urne numerotée X et on extrait une boule de cette urne. On note Y le numero de cette boule.

1. Soit $i \in [\![1,6]\!]$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $(X=i)$?
2. Déterminez la loi conjointe du couple (X,Y) et en déduire la loi de Y.
3. On veut généraliser la situation.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose cette fois qu'on a n urnes $U_1, \dots U_n$ toujours de sorte que l'urne U_k contient k boules numerotées de 1 à k, on lance un dé à n faces équilibrées et on conserve le même protocole que précédemment, en notant X la face du dé, et Y le numero de la boule extraite.
   (a) Déterminer la loi du couple (X,Y)
   (b) En déduire la loi de Y (qu'on laissera sous forme de somme)
   (c) Calculer l'espérance de Y (qu'on ne laissera pas sous forme de somme....)

Exercice 17 :

Soit un jeu de $2n$ cartes ($n = 17$ ou 27) qui contient deux jokers. On joue au jeu suivant :

— On retourne les cartes une à une jusqu'à obtenir le premier joker

— Après le premier joker, à chaque fois que l'on retourne une carte, le joueur paie un euro.

— dès que le deuxième joker est retourné, le joueur gagne a euros (où $a \in \mathbb{R}$ a été décidé en début de partie) et arrête de jouer.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes retournées pour obtenir le premier joker, et Y pour le deuxième.

1. Montrez que si $1 \leq i < j \leq 2n$, $P(X = i \cap Y = j) = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

2. Donner la loi du couple (X, Y), puis les lois de X, Y et $Y - X$.
3. Calculez $E(X)$.
4. Déterminer la valeur de a pour laquelle la partie est équilibrée.