Analyse Chapitre 10 : Analyse Asymptotique
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^x$
2. $\lim_{x\to 0} x^x$
3. $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(x+2)}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$ (en fonction de $a\in\mathbb{R}$)
6. $\frac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ en $+\infty$.
7. $x^2(\ln(x+1)-\ln x)$ en $+\infty$
8. $\frac{x\ln(1+x)}{\sin x}$ en 0.
9. $(1+x^\alpha)^{\frac{1}{x}}$ en 0 selon la valeur de $\alpha>0$.

Exercice 2 :

Ranger par ordre de négligeabilité les suites ci dessous :

$$(lnn), (\sqrt{n}), (e^n), (n^9), (2^n), (\sqrt[5]{n}), (\left(\frac{4}{5}\right)^n), (n!), (\frac{1}{n^3}), (\ln^3(n)), (5), (n^3)$$

Exercice 3 :

Calculez les limites des suites suivantes, en proposant un équivalent simple, ou, à défaut, en utilisant toute autre technique permettant de conclure :

1. $u_n=\frac{4n^4+3n^2+1}{n^2+n^3-2n^4}$.
2. $u_n=\frac{2^n}{n^5+3n+1}$.
3. $u_n=\frac{2^n+n}{2^n}$.
4. $u_n=(n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$.
5. $u_n=\frac{\ln(n)}{n^2-3n+3}$.
6. $u_n=(n-3)\sqrt{\frac{n^3+1}{n^2+3}}$.
7. $u_n=(1+\frac{1}{n})^n$.
8. $u_n=e^n\ln(1+e^{-n^2})$.
9. $u_n=(n^2-5n+3)\sin\frac{1}{n^2+n+1}$
10. $u_n=n\ln\left(1+e^{-n}\right)$
11. $u_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
12. $u_n=n-\sqrt{n^2+1}$.
13. $u_n=2n-\sqrt{4n^2+n+1}$
14. $u_n=n^2\left(\exp(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})-1\right)$
15. $u_n=\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{3n+1}$
16. $u_n=(2n^2-n+1)\left(\sqrt{1+\sin(\frac{1}{n^2})}-1\right)$

Exercice 4 :

Calculez les développements limités indiqués :

1. $DL_3(0)$ de $x\mapsto\frac{\cos x}{1-x}$
2. $DL_3(0)$ de $x\mapsto e^x\frac{\sin x}{x}$
3. $DL_3(0)$ de $x\mapsto\frac{\ln(1+x)}{1+\sin(x)}$
4. $DL_3(0)$ de $x\mapsto\ln(x+\sqrt{\cos(x)})$
5. $DL_3(0)$ de $x\mapsto\ln(\frac{\sin(x)}{x})$
6. $D_3(0)$ de $x\mapsto e^{\cos(x)}$.
7. $DL_3(0)$ de $x\mapsto\sin(x)^2\cos(x)^2$

Exercice 5 :

Calculez les limites au point indiqué de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
2. $f(x) = \dfrac{\sin(2x) - x}{\ln(1+x)}$ en 0.
3. $f(x) = \dfrac{(\sin x)\sqrt{1+x^2} - x}{x^3}$ en 0
4. $f(x) = \dfrac{ch(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^3}$ en 0^-
5. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{\cos(x) - e^x}$ en 0
6. $\dfrac{2}{\sin^2(x)} + \dfrac{1}{\ln(\cos(x))}$ en 0

Exercice 6 :

Déterminez des équivalents simples au voisinage du point indiqué des fonctions f suivante :

1. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+\sin(x)})$ en $x = 0$
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$ au voisinage de 0.
3. $f : x \mapsto \ln(1 + \dfrac{1}{x+1}) - \dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 :

1. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + e^{x-1}$. Déterminez l'équation de la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la position relative de cette tangente au voisinage de 1.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1 - \sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}$. A l'aide d'un DL au voisinage de 1, montrez que f peut se prolonger par continuité et discutez de la courbe de f au voisinage de 1.
3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{3x-2}}{1+\ln x}$. Montrez que f admet un maximum local en 1.

Exercice 8 :

Etudiez à l'aide de développement limités les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ de la courbe représentative de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
3. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

Exercice 9 :

Soit f et φ deux fonctions strictement positives au voisinage de a et telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, alors $\ln\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \ln\big(\varphi(x)\big)$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = +\infty$, alors $\ln\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \ln\big(\varphi(x)\big)$.
3. A-t-on $\ln\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \ln\big(\varphi(x)\big)$ dans tous les cas (sans hypothèse supplémentaire) ?
4. Que dire de $e^{f(x)}$ et $e^{\varphi(x)}$?