Analyse - Chapitre 10

Analyse asymptotique et développements limités

Dans tout le chapitre , $a \in \bar{\mathbb{R}}$ (c'est à dire $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$).
Les fonctions et suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, la notation $|\ |$ désigne la valeur absolue ou le module.

I Comparaison des fonctions :

1) Fonctions négligeables :

a) Définition :

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D, telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$

A noter : **Définition alternative**

Dire que f est négligeable devant g au voisinage de a équivaut à dire qu'il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D$,

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Cette définition est efficace d'un point de vue théorique et permet de se passer de l'hypothèse "g ne s'annule pas".

Exemple à connaitre : comparaison des puissances
Soient $n < p$ deux entiers et soit $f(x) = x^n$ et $g(x) = x^p$. On veut les comparer en $+\infty$ et en 0 :

Exemple à connaître : croissances comparées
Cette notation permet d'écrire d'une autre manière les croissances comparées :

Proposition 1 :
Soit α et β avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$(\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}) \qquad (\ln(x))^\beta \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Autrement dit, ln est négligeable devant toute puissance positive de x à l'infini, et les puissances de $x \mapsto x$ sont négligeables devant toute puissance positive de exp.

▷ *Preuve* :

◁

b) Opération sur les fonctions négligeables :

Opérations usuelles :

Propriété 1 :
Soient f, g, h, f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies sur un même ensemble D et $a \in D$ (ou à la frontière).

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$ (transitivité)
2. si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$ (produit autorisé)
3. si $f = o(g)$, alors $|f| = o(|g|)$ (composition par valeur absolue autorisée)
4. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$ (combinaison linéaire possible... ou presque)

▷ *Preuve* : Tout se démontre en faisant le quotient ou en jouant avec la définition alternative. Par exemple pour (2) et (4) :

◁

Par exemple : $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ et $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$, donc $x^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

Attention piège :
La somme est toujours possible mais les fonctions doivent être négligeables **devant la même fonction** g.

c) Substitution

Proposition 2 :

Soit u définie sur un ensemble D' et à valeurs dans D, telle que $\lim_{t \to b} u(t) = a$.

$$\text{Si } f(x) \underset{a}{=} o(g(x)), \text{ alors } f(u(t)) \underset{b}{=} o(g(u(t)))$$

Autrement dit : on peut remplacer x par une fonction, à condition que la fonction considérée tende vers a.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
On a $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$. Soit $u(t) = \dfrac{1}{t^2}$. On a $\lim_{t \to 0} u(t) = +\infty$ donc par substitution

$$\frac{1}{t^2} \underset{0}{=} o\left(e^{\frac{1}{t^2}}\right)$$

2) Relation de domination :

a) Définition :

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur D.
On dit que f est **dominée par** g **au voisinage de** a si et seulement si il existe φ une fonction bornée au voisinage de a telle que $f(x) = \varphi(x)g(x)$.
On note alors $f(x) \underset{a}{=} O(g)$ (lire "grand O" de g).

Exemple : Soit $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée au voisinage de 0 (et bornée tout court d'ailleurs....), on a $f(x) = O(x^2)$.

A noter : **DÉFINITION ALTERNATIVE**

Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf eventuellement en a), dire que f est dominée par g au voisinage de a équivaut à dire que $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

b) Règles usuelles de manipulation

Exactement les mêmes (avec les mêmes preuves) que pour les négligeabilités :

Opérations usuelles :

Propriété 2 :

Soient f, g, h, f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies sur un même ensemble D et $a \in D$ (ou à la frontière)

1. Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$ (transitivité)
2. si $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$ (produit autorisé)
3. si $f = O(g)$, alors $|f| = O(|g|)$ (valeur absolue ou module autorisés)
4. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$, alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = O(g)$

Substitution :

Proposition 3 :

Soit u définie sur un ensemble D' et à valeurs dans D, telle que $\lim\limits_{t \to b} u(t) = a$.
Si $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$, alors $f(u(t)) \underset{b}{=} O(g(u(t)))$

c) Lien avec les "petits o"

Propriété 3 :

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, on a $f \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

? Le saviez-vous ? **Edmund Landau**

Bien que la notion de négligeabilité a existé avant lui, on doit la notation "petit o" au mathématicien Edmund Landau (1877-1938). Cette notation provient du mot allemand "Ordnung" (l'ordre).

Edmund Landau est auteur de nombreux travaux sur la théorie des nombres, et son sens du travail et sa passion pour les mathématiques étaient unanimement reconnus.
Professeur à l'université de Berlin, puis de Goettingen, il doit fuir la ville avec la montée du nazisme en 1933.
De retour à Berlin, Landau n'est plus autorisé à enseigner, à cause de sa judeité. Il écrit pourtant des cours qui sont présentés par un autre enseignant. Landau, lui, reste assis parmi les élèves dans la salle.
La violence de l'antisémitisme est telle qu'en novembre 1938, des élèves de l'université, accompagnés par plusieurs soldats du régime, lui refusent définitivement l'accès à ses propres cours...

3) Et pour les suites ?

a) Définition

En voyant les suites comme des fonctions particulières où seule la limite en $+\infty$ a un sens, on définit naturellement les notions de négligeabilité et domination pour les suites :

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites tel que v_n ne s'annule pas APCR.

- On dit que $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- On dit que $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée.

Notez qu'il n'est alors pas nécessaire d'indiquer "$+\infty$" sous le signe $=$ puisque les limites sont forcément en $+\infty$.

On peut ainsi réécrire les croissances comparées :

Proposition 4 : croissances comparées pour les suites

Pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$,

$$(\ln(n))^\beta = o(n^\alpha) \quad n^\alpha = o(q^n) \quad q^n = o(n!)$$

b) Calcul :

Les règles de calcul pour les opérations usuelles sont les mêmes que pour les fonctions, mais la substitution va s'écrire de manière un peu différente :

Proposition 5 :

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ (resp. $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$).
Soit (u_n) une suite telle que $\lim u_n = a$, alors

$$f(u_n) \underset{b}{=} o(g(u_n)) \quad \text{(resp. } f(u_n) \underset{b}{=} O(g(u_n))$$

Exemple :

Comparons $\ln\left(\sin(\frac{1}{n})\right)$ et $\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{n})}$.

II Fonctions équivalentes

1) Généralités et exemples :

a) Définition

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D et telles que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

On dit que f est **équivalente à** g **au voisinage de** a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$, ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$

Et on a également la caractérisation immédiate suivante :

A noter : **DÉFINITION ALTERNATIVE...**

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement il existe une fonction U définie sur D telle que, $\forall x \in D, f(x) = U(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} U(x) = 1$.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

b) Lien avec les fonctions négligeables :

Proposition 6 :

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D. Alors $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$

▷ *Preuve* :

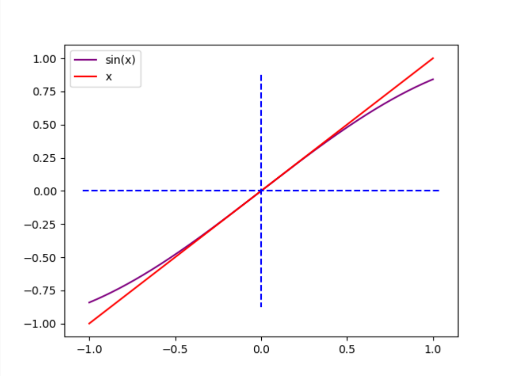
◁

Par exemple :

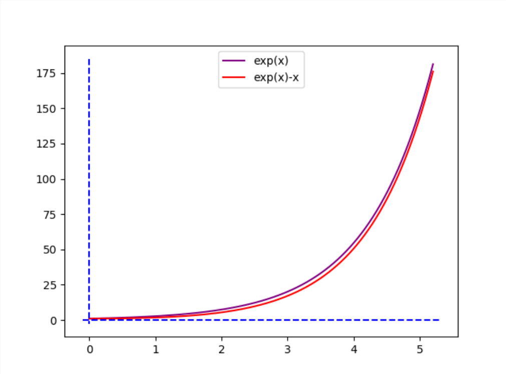
- $e^x - x \underset{+\infty}{=} e^x + o(e^x)$, donc $e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x$.
- On a montré que $\sin(x) \sim (x)$, donc $\sin(x) = x + o(x)$: on retrouve le développement limité d'ordre 1, utilisé fréquement.

A noter : INTERPRÉTATION : DES FONCTIONS "PRESQUE ÉGALES"

Dire que $f \underset{a}{\sim} g$ signifie que $f(x) = g(x) + o(g(x))$. Autrement dit, $f(x)$ est "presque égal" à $g(x)$ puisque la différence est négligeable devant g.
Par exemple, on a vu que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. Graphiquement, cela se traduit par :



De même, on vient de voir que $e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x$. Quand on trace les deux fonctions, on voit :



c) Équivalents usuels

A partir de la dérivation :
On a vu que f est dérivable si et seulement si elle admet un DL d'ordre 1. Ainsi :

Proposition 7 :

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$.
2. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (α doit être constante), $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$,
4. En particulier, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$

▷ *Preuve* :

◁

Polynômes :

Proposition 8 :

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n x^n$
Autrement dit, un polynôme est équivalent en l'infini à son terme de plus haut degré.

▷ *Preuve* :

◁

Danger ! **Résultat valable uniquement en $+\infty$ ou $-\infty$.**

Contre exemple en 0 : soit $P(x) = x^3 + 4x^2 + x$
Alors $P(x) = x(x^2 + 4x + 1)$ et donc en posant $u(x) = x^2 + 4x + 1$ on a $u(x) \to 1$ et $P(x) \underset{0}{\sim} x$.

En revanche $\dfrac{P(x)^3}{x} = 1 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ tend quant à lui vers $+\infty$ si $x \to 0^+$: $P(x)$ n'est pas équivalent à x^3....
On peut montrer qu'en 0, un polynôme est équivalent à son monôme de plus petit degré...

2) Propriétés conservées par les équivalents :

a) Lien avec les limites :

Proposition 9 :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point a et tel que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \to a} g(x)$ existe et les limites sont alors égales.

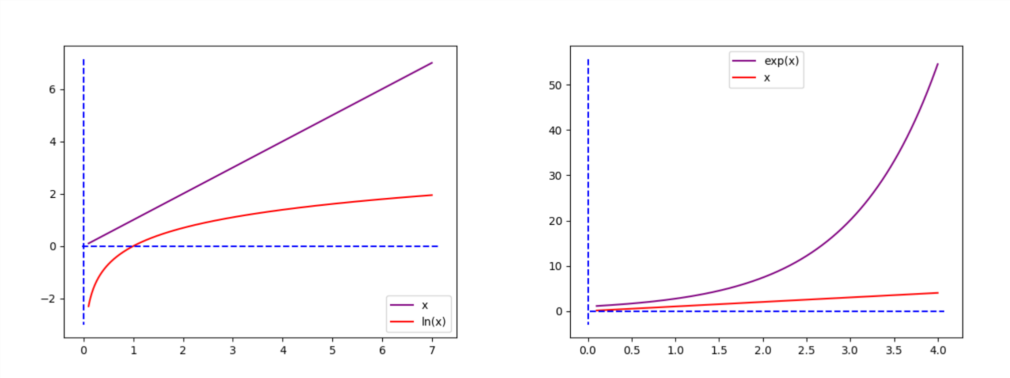
▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
On veut calculer $\lim_{x \to +\infty} e^x - x$:

Danger ! **MÊME LIMITE NE VEUX PAS DIRE ÉQUIVALENTS !**

Etre équivalent veut dire bien plus que "même limite". Par exemple les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ ont toutes les trois pour limite $+\infty$, mais ne sont pas du tout équivalentes :



b) Signe et équivalent

Propriété 4 :

Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Danger ! **ATTENTION, MONOTONIE NON CONSERVÉE**

Etant donné que le signe des fonctions est conservée, on pourrait s'attendre à ce qu'il en soit de même pour les variations. Ce n'est PAS le cas.
Par exemple : soit $f(x) = x + x\sin(x)$. Alors f n'est clairement pas monotone. Pourtant, $f(x) \underset{0}{\sim} x$ qui est croissante....

c) Encadrement et équivalent :

Propriété 5 :

soient f,g et h des fonctions à valeurs réelles vérifiant $f \leq g \leq h$.
Si $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$, alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

3) Calcul avec des équivalents :

a) Propriétés algébriques :

Propriété 6 :
(i) si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$ (relation symétrique)
(ii) si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} g$ (relation transitive)

▷ *Preuve* :

◁

Cela signifie qu'on va pouvoir faire des "enchainements" d'équivalents....

b) Opérations usuelles

Propriété 7 : Produit et quotient

1. $\forall \lambda \neq 0$, si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$ (produit par un scalaire autorisé)
2. si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ (produit d'équivalents autorisé)
3. si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ (quotient d'équivalents autorisé)
   En particulier si $f \underset{a}{\sim} g$, $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$ (passage à l'inverse autorisé)

▷ *Preuve* : Tout se montre avec les définitions très facilement. Par exemple pour le produit :

◁

Propriété 8 : Rares compositions autorisées

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^p \sim g^p$
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $f > 0$ et $g > 0$, si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$, et en particulier si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $|f| \underset{a}{\sim} |g|$ (passage à la valeur absolue autorisée)

▷ *Preuve* : Encore une fois, très simple avec la définition... ◁

Exemple :

Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{(x^5+x^4+3x^2)^8}{(x^6+4x^4-x^3+2x)^7}$.

c) Ce qu'on n'a pas le droit de faire :

Presque tout le reste... En cas de doute, revenir à la définition ou faire le quotient : si ça tend vers 1, c'est bon, sinon, c'est perdu.

En particulier :

Danger ! **SOMMES D'ÉQUIVALENTS INTERDITES**

Sauf exceptions, la somme d'équivalent n'est pas possible.
Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, on n'a pas forcément $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Exemple :
Soient $f_1(x) = x^2 + 2$, $f_2(x) = -x^2 + x$.

Danger ! **COMPOSITIONS PAR UNE FONCTION INTERDITES**

Composer par des fonctions autres que celles proposées dans la partie 4c est interdit. Ainsi, si $f \underset{a}{\sim} g$, on a pas forcément $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

Exemple :
$x^2 + x \sim x^2$, mais si on regarde e^{x^2+x} et e^{x^2}, on a :

d) Substitution

Proposition 10 :

Soif $u : D' \to D$ une fonction avec $\lim\limits_{t \to b} u(t) = a$. Soient f et g telle que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $f(u(t)) \underset{b}{\sim} g(u(t))$.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Donnez un équivalent de $\sin(e^{-x})$:

De manière générale, on peut retenir que :

Proposition 11 :

si u est une fonction telle que $\boxed{\lim_{x\to a}(u(x))=0}$, on a :

1. $\sin(u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$ et $\tan(u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$
2. $\ln(1+u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$ et $e^{u(x)}-1 \underset{a}{\sim} u(x)$
3. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $(1+u(x))^{\alpha}-1 \underset{a}{\sim} \alpha u(x)$
4. en particulier, $\sqrt{1+u(x)}-1 \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{2}u(x)$

4) Et pour les suites ?

On peut tout naturellement définir la notion d'équivalence pour les suites, avec exactement les mêmes propriétés de calculs... et les mêmes interdits que pour les fonctions !

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites non nulles *APCR*. On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** et on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Le principe de substitution appliqué aux suite donne alors directement :

Proposition 12 :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et telles que $f \underset{a}{\sim} g$.
Alors si (u_n) est une suite telle que $\lim u_n = a$, on a

$$f(u_n) \sim g(u_n)$$

Exemples :

- Comme $sin(x) \underset{0}{\sim} x$, et que $\dfrac{1}{n} \to 0$, alors $\sin(\dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$
- Calculez $\lim_{n\to+\infty}(n^2+3n+\ln(n))\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$:

III Développements limités

1) Construction

a) Développement limité en 0

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $0 \in I$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** 0 (en abrégé : $DL_n(0)$) si et seulement si $\exists a_0, a_1, \ldots, a_n$ réels tels que

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n) \end{aligned}$$

Le terme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est appelé "partie régulière d'ordre n" de f.

Exemples :
On en connait déjà plein, à l'ordre 1... par exemple :

- $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ donc sin admet un $DL_1(0)$, de partie régulière x.
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim}= \dfrac{1}{2}x$, donc $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$

Un premier "vrai" calcul de DL
Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)}$$

En remplaçant x par $-x$ et étant donné qu'un $o(x^n)$ est également un $o((-x)^n)$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

b) DL en un point autre que 0

Il est souvent plus pratique de regarder des DL en 0, qui sont d'allure assez “simple”, mais on peut définir les DL en n'importe quel point $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a (abrégé $DL_n(a)$) si et seulement si il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Proposition 13 :

f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$

Ainsi,

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

équivaut à

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$

▷ *Preuve* : c'est un "bête" changement de variable... ◁

Exemple :

On veut faire le $DL_n(1)$ de $\dfrac{1}{x}$.

Danger ! **Ne pas développer !**

Quand on a un DL ailleurs qu'en 0, on ne développe JAMAIS les termes et on laisse toujours sous la forme

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

c) Conséquence sur la régularité, interprétation

Continuité :

Proposition 14 :

f est continue en a (ou prolongeable par continuité en a) si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 0 en 0. Le coefficient a_0 est alors $f(a)$ (ou la limite de f en a)

▷ *Preuve* :

◁

Signe :

Propriété 9 :
Si f admet un développement limité en a avec $a_0 \neq 0$, alors f est du signe de a_0 au voisinage de a.

▷ *Preuve* :

◁

Dérivabilité :

Proposition 15 :
f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \ell h + o(h)$$

c'est à dire si et seulement si

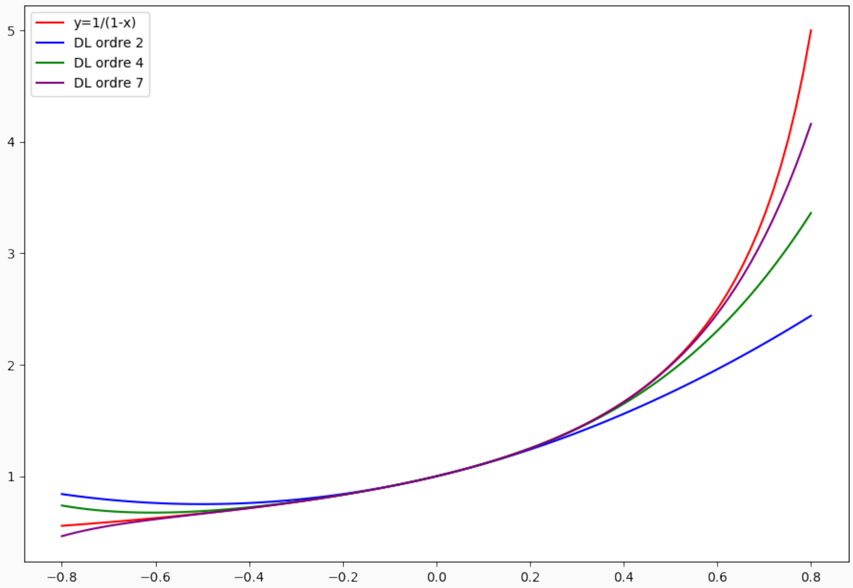
$$f \text{ admet un } DL_1(a)$$

Les coefficients de la partie régulière sont alors $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

▷ *Preuve* : c'est ce qu'on a fait dans le chapitre dérivation. ◁

A noter : **Interprétation :**

Avoir un DL à l'ordre 1 traduit la dérivabilité, c'est à dire le fait que la courbe de f admet une tangente, c'est à dire que la courbe de f est "presque" une droite (ce que traduit le $o(x)$).
Un développement limité à l'ordre n permet d'aller plus loin : il signifie qu'une fonction f est, au voisinage du point considéré, "presque" un polynôme. Plus l'ordre est grand, plus on est précis.



L'intérêt est très grand : les polynômes sont les fonctions les plus simples à manipuler.

2) Propriétés :

a) Unicité et troncature

Theorème 1 :

Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

▷ *Preuve* :

◁

Conséquence : les DLs obtenus précédemment sont les seuls possibles, et on peut parler "DU" développement limité à l'ordre n d'une fonction, pas seulement "d'un"...
De plus il n'est pas nécessaire de tout recalculer si on est allé trop loin :

Proposition 16 :

Si f admet un $DL_n(0)$ pour un n fixé, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout p plus petit que n obtenu en s'arrêtant dans la partie régulière du $DL_n(0)$ aux termes de degré plus petit que p.

Plus précisément, si

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors f admet un $DL_p(0)$ donné par :

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + o(x^p)$$

on dit qu'on a effectué la **troncature** du développement limité.

▷ *Preuve* :

◁

Notation : On pourra noter Tr_n la troncature d'un polynôme à l'ordre n. Par exemple :
$Tr_2(1 + x^2 + 3x^3 + 5x^4) =$

b) Parité et développement limité

Propriété 10 :
Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0.

1. si f est paire, les coefficients d'indice impaire sont nuls.
2. si f est impaire, les coefficients d'indice paire sont nuls.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
Attention, il n'y a pas équivalence ! si $f(x) = \sum_{k=0} a_{2k}x^{2k} + o(x^{2k})$, alors f n'est pas forcément paire : il y a des choses dans le "petit o" qui peut contredire la parité...

3) Formule de Taylor - Young

a) Intégration des développements limités

Theorème 2 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Soit F une primitive de f. Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant la partie régulière de f et en ajoutant $F(0)$, ie. :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

▷ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemple d'application : développement de $\ln(1+x)$ **et de** $\arctan(x)$

- La fonction $f : x \to \ln(1+x)$ est dérivable avec $f'(x) =$

  Ainsi

  $$\ln(1+x) \underset{0}{=}$$

  Par substitution, on a également :

  $$\ln(1-x) \underset{0}{=}$$

- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

b) Formule de Taylor-Young

Theorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I avec $0 \in I$. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

La partie régulière de ce DL, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est appelé “polynôme de Taylor de f à l'ordre n en 0".

▷ *Preuve* :

◁

Remarques :

- On peut donner une version en tout point a de Taylor Young, qu'on utilise assez rarement vu qu'on se ramèner facilement en 0.

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

- La formule de Taylor-Young permet ainsi de calculer des DL à n'importe quel ordre des fonctions usuelles... à condition de savoir calculer les dérivées successives.
- Ce théorème permet aussi d'affirmer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un développement limité à l'ordre que l'on veut !

c) Développements limités obtenus avec Taylor Young :

Exponentielle

Soit $f : x \mapsto e^x$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc on peut utiliser TY à n'importe quel ordre. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, on a $f^{(n)}(0) = 1$, d'où le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :

$$e^x \underset{0}{=}$$

Sinus et cosinus
Soit maintenant $f : x \mapsto \sin(x)$.

$$\boxed{\sin(x) \underset{0}{=} \qquad\qquad}$$

De la même façon, on montre que

$$\boxed{\cos(x) \underset{0}{=} \qquad\qquad}$$

Puissances (et racines)
Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et donc pour $x > -1$, on peut calculer $f'(x)$.
On obtient

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

donc $f'(0) = \alpha$, puis $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, donc $f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1)$ etc...
D'où, par récurrence :

$$f^n(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}_{n \text{ termes}}(1+x)^{\alpha-n}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$ Ce qui donne :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Remarque :
Si α est un entier, on a $\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \dbinom{\alpha}{2}, \dots, \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \dbinom{\alpha}{n}$
Ainsi, la partie régulière d'ordre n de $(1+x)^\alpha$ est le début du binome de Newton : on garde les n premier termes de $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k 1^{\alpha-k}$.

Exemple :
Si on veut un $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$, c'est le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et on a

4) Calcul avec les DLs

a) Combinaisons linéaires

On a vu que si $f = o(x^n)$ et $h = o(x^n)$, alors $\lambda f + \mu h = o(x^n)$. Autrement dit, on peut additionner et faire des combinaisons linéaires de "petit o" si ce sont les petits o de la même chose. On a donc directement :

Proposition 17 :

Soient f et g deux fonctions admettant un $DL_n(a)$. Soit λ et μ deux réels.
Soient P_f la partie régulière de f et P_g la partie régulière de g, alors
$\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $\lambda P_f + \mu P_g$.

Exemple :

Soit $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donner son $DL_4(0)$:

On peut d'ailleurs formuler la version d'ordre n :

$$ch(x) \underset{0}{=}$$

Et de même, $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ce qui donne comme développement limité :

$$sh(x) \underset{0}{=}$$

b) Produit

Proposition 18 :

Soient f et g admettant un $DL_n(0)$, de parties régulières respectives P_f et P_g.
Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est donnée par le produit $P_f(x) \times P_g(x)$ dans lequel on n'a gardé que les monomes de degré inférieur à n.
Ainsi $P_{fg} = Tr_n(P_f P_g)$

▷ *Preuve :* (principe :) Lorsqu'on fait le produit de f et de g, on a le produit des deux polynômes, puis les produits de ε entre eux et des ε avec les polynômes. Ces derniers sont négligeables devant x^n et le produit des deux polynômes donne des termes de degré $> n$, eux aussi négligeables.

◁

Exemple :
Donner le $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin(x)e^x$:

Cas particulier : produit par des puissances de x

Proposition 19 :

Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$, et $p \in \mathbb{N}$, alors $x^p f(x)$ admet un $DL_{n+p}(0)$ de partie régulière $x^p P_f$.

▷ *Preuve :* si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ alors

$$x^p f(x) \underset{0}{=} a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{p+2} + \ldots + a_n x^{n+p} + x^{n+p}\varepsilon(x)$$

d'où $x^p f(x) = x^p P_f(x) + o(x^{n+p})$ ◁

Exemple :
Donner le $DL_5(0)$ de $x^3\sqrt{1+x}$.

c) Quotient

Le quotient de deux fonctions admettant un DL n'admet pas forcément toujours un DL.
Néanmoins, si f et g admettent un $DL_n(0)$ et que $g(0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.
Dans ce cas, la technique est la suivante :

Méthode : QUOTIENT DE DL DANS LE CAS OÙ LE DÉNOMINATEUR NE S'ANNULE PAS

- On commence par écrire que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$.
- Puis un banquier :
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(0) + g(x) - g(0)}$$
On factorise ensuite par $g(0)$ pour avoir :
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(0)} \times \frac{1}{1+u(x)} \text{ avec } u(x) = \frac{g(x)-g(0)}{g}(0)$$
- Comme $u(x) \to 0$, on cherche son $DL_n(0)$ et on substitue dans celui de $\dfrac{1}{1+x}$, en tronquant ce qui est d'ordre supérieur à n. On obtient ainsi le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{g(x)}$.
- On calcule le DL_n de f et on fait le produit avec le DL_n de $\dfrac{1}{g(x)}$.

Exemple :
Calcul du $DL_3(0)$ de $\tan x$.

Au secours ! ET SI C'EST UNE FORME INDÉTERMINÉE 0 SUR 0 ?

C'est le cas le plus compliqué : quand on obtient des quotients de DL en "0 sur 0". Il n'y a pas toujours de DL dans ces cas là...
Le principe est d'écrire les deux DLs et de simplifier "comme si on avait des fonctions normales".... On verra cela sur des exemples en TD car de nombreuses configurations sont possibles.

Cas particulier : division par une puissance de x
Comme pour le produit et la composition de DL, on dispose d'un résultat pratique quand on divise par des puissances de x :

Propriété 11 :
Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = a_p x^p + \dots a_n x^n + o(x^n)$ (c'est à dire : les p premiers coeffs sont nuls), alors $\dfrac{f(x)}{x^p} = a_p + \dots a_n x^{n-p} + o(x^{n-p})$: on obtient un $DL_{n-p}(0)$.

Exemple : $DL_4(0)$ de $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.

IV Applications des développements limités

1) Recherche d'équivalents, de limites

Theorème 4 :
Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière non nulle. Alors f est équivalente au voisinage de 0 au monome non nul de plus bas degré de la partie régulière

▷ *Preuve* :

◁

Exemple : On sait que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi, $\cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et donc

Propriété 12 :
On a l'équivalence

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

En particulier si (u_n) est une suite telle que $u_n \to 0$

$$\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

En $\pm\infty$:
Les DLs, via des changements de variables, permettent de donner des équivalents en en $+\infty$, en posant $X = \dfrac{1}{x}$.

Exemple : On veut déterminer un équivalent de $f(x) = x\ln(\dfrac{x}{1+x}) + 1 - \dfrac{1}{2x}$ en $+\infty$.

2) Etude locale

a) Extremum local en un point intérieur :

Proposition 20 :
Soit f une fonction définie sur I et a un point intérieur de I.

- Si f a un $DL_1(a)$ et atteint un extremum local en a, alors le coefficient d'ordre 1 du développement limité est nul.
- Si f a un $DL_2(a)$ de la forme :

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)$$

avec $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f a un minimum local en a.

Remarque :
De même si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f a un maximum local en a.
▷ *Preuve :*

◁

b) Tangente

Si f admet un $DL_1(a)$, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$
Ainsi, le début du développement limité nous donne la tangente en a à la courbe de f.
Si on a un développement limité d'ordre supérieur, on va pouvoir récupérer des informations supplémentaires, comme la position par rapport à cette tangente.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)}$. On cherche sa tangente en 0.

c) Prolongement et étude du prolongement

L'obtention de DL peut permettre de traiter plusieurs problèmes simultanément.
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
A priori, f n'est pas définie en 0, mais nous allons tout de même essayer de faire un $DL_3(0)$.
On part de

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

3) Recherche d'asymptote et position relative

a) DL en $+\infty$, développement asymptotique

Définition :

On dit qu'une fonction f admet un DL en $+\infty$ d'ordre n si et seulement si il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

On parle de **développement asymptotique** si on a une écriture de la forme

$$f(x) \underset{+\infty}{=} b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

exemple :

Soit $f : x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

b) Recherche d'asymptote : méthode

Dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on peut (parfois) avec un DL généralisé déterminer une asymptote.

Méthode : Utilisation de DL pour une recherche d'asymptote

Methode :

1. On cherche un DL en $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$
2. Si on obtient quelque chose de la forme

$$\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{=} a_0 + a_1\frac{1}{x} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

   alors

$$f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1 + a_2\frac{1}{x} + \ldots + a_n\frac{1}{x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

3. L'asymptote a pour équation $y = a_0 x + a_1$ et l'étude des termes suivants permet de déterminer la position.

c) Exemples :

- Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.

- Soit f définie par $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$