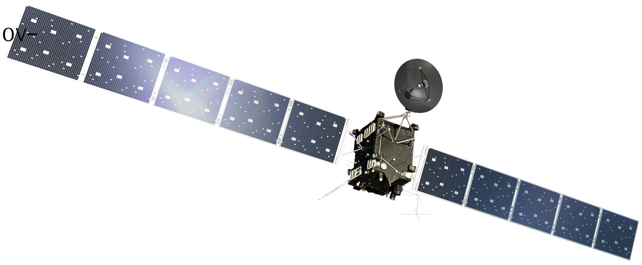
À propos de la sonde Rosetta



Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guérassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae). En novembre 2014, le module Philae a été envoyé à la surface de la comète.
L'objet de cette épreuve est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par v le module du vecteur $\vec{v}$. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé par la suite même s'il n'a pas été obtenu par le candidat. Les données numériques utiles sont fournies **à la fin du problème**.
On s'intéresse à une étude simplifiée de problématiques liées à la navigation spatiale. *Une deuxième partie abordait dans le sujet d'origine l'optique d'un instrument embarqué. Elle n'a pas été incluse dans ce devoir.*

1 Question Préliminaires

Q1 1. Montrer que la force de gravitation $\vec{F}$ que le Soleil exerce sur un objet de masse m situé à une distance r de son centre est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.

Q2 2. Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.

Q3 3. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.

Q4 4. Montrer que l'énergie mécanique d'un objet de masse m pour une orbite elliptique autour d'un corps de masse M est donnée par $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{a}$, où a est le demi grand axe de l'ellipse.

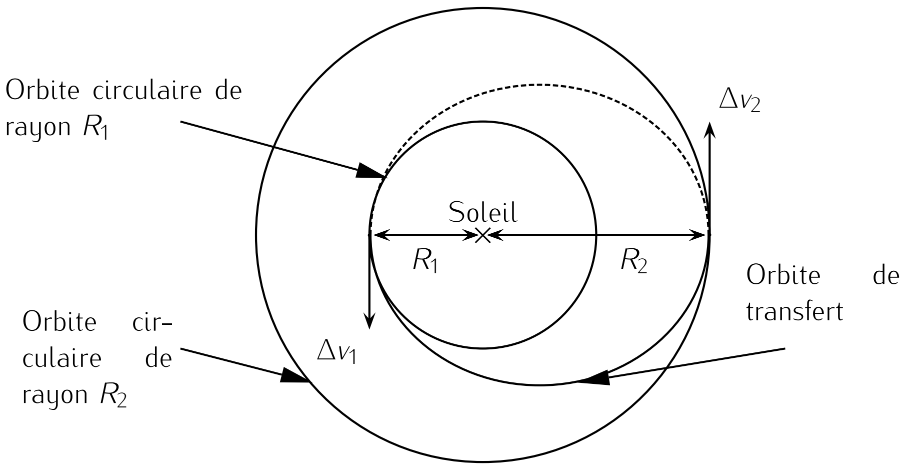
2 Ellipse de Hohmann

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir Figure 1) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2, permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.

Figure 1 :

Transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires de rayons R_1 et R_2 autour du soleil.

L'orbite elliptique de transfert possède un demi grand axe $a = (R_1 + R_2)/2$



Q5 5. Montrer que l'expression du paramètre Δv_1 permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon R_1 à une orbite elliptique de demi grand axe $a = \frac{R_1+R_2}{2}$ est :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right)$$

Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission a placé dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire.
On souhaite évaluer la valeur de Δv_1 permettant de rejoindre la comète.

6. Le périhélie de la comète, c'est-à-dire le point de la trajectoire le plus proche du soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre.
Q6 Trouver les valeurs de R_1 et R_2 pour l'orbite elliptique sur laquelle on veut arriver.

Q7 7. En déduire la valeur Δv_1 nécessaire à cette manœuvre.

Cette grandeur (appelée aussi budget Δv) permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à une valeur Δv_i, le budget Δv correspond alors à la somme de ces dernières.
On prendra pour la suite du problème une valeur de Δv pour rejoindre la comète 67P/TG de 9,2 km·s^{-1}.

3 Lien entre budget Δv et carburant

La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteur-fusées à ergols liquides. Les moteurs permettent d'effectuer les corrections orbitales au cours du long périple de la sonde afin de placer celle-ci en orbite autour de la comète. Nous cherchons à estimer la masse d'ergols nécessaire à la réalisation de la mission.

Q8 8. L'éjection de gaz par les tuyères des propulseurs permet de modifier la vitesse de la sonde. On considère un mouvement rectiligne de la sonde. L'équation du mouvement, **que l'on ne demande pas de retrouver**, s'écrit alors :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_e$$

où m est la masse de la sonde à l'instant t, v sa vitesse et v_e la vitesse d'éjection des gaz.
En considérant que la vitesse d'éjection est constante, montrer que

$$\Delta v = v_e \ln\left(\frac{m+\Delta m}{m}\right)$$

où Δm est la masse de carburant utilisée pour produire une variation de vitesse Δv.

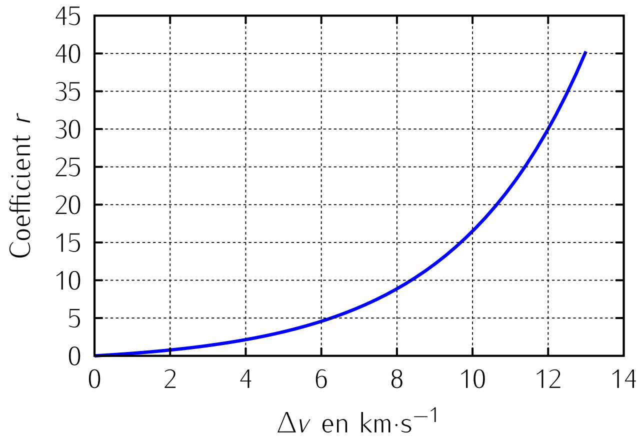
Cette relation est appelée équation de Tsiolkovski. Elle relie l'accroissement de vitesse au cours d'une phase de propulsion d'un objet (sonde, fusée ...) doté d'un moteur à réaction au rapport de sa masse initiale à sa masse finale.

Q9 9. La quantité de carburant nécessaire à une mission est souvent quantifiée par le paramètre r défini comme $r = \dfrac{\text{masse de carburant}}{\text{masse du véhicule à vide}}$. Déterminer la relation entre r et Δv.

Q10 10.

À partir des résultats obtenus à l'aide de notre prochain cours de thermodynamique sur les systèmes ouverts, on peut tracer (voir la figure ci-contre) la valeur du coefficient r en fonction de Δv. Indiquer de façon argumentée, en vous aidant des données fournies, si une trajectoire de Rosetta associée à une injection directe sur l'orbite de la comète 67P/TG est envisageable.

Figure 2 : Évolution de r en fonction de Δv

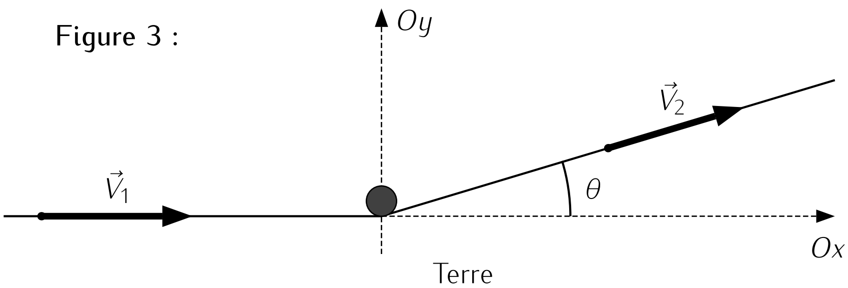


4 Fronde gravitationnelle

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée d'ergols, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation d'ergols. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen $\mathcal{R}_T$. La sonde arrive de l'infini (c'est-à-dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse $\vec{V}_1$ dans le référentiel R_T. La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique $\vec{V}_2$ (voir la Figure 3).

Figure 3 :



Q11 11. Montrer que l'on a $V_1 = V_2$.

12. On posera $V = V_1 = V_2$. On suppose que dans le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_H$ la vitesse de la Terre $\vec{v}_T$ est dirigée suivant la direction Oy de la Figure 3.

On admettra la loi de composition des vitesses suivantes :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_H) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) + \vec{v}_T$$

où $\vec{v}(M/\mathcal{R}_H)$ représente la vitesse d'un point matériel M par rapport au référentiel héliocentrique et $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$ celle par rapport au référentiel géocentrique.

Q12 En déduire l'expression de la variation Δv de la valeur de la vitesse $\vec{v}$ de la sonde dans le référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de la Terre en fonction de v_T, V et θ. Donner une estimation de Δv en prenant $V = 5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $\theta = 45°$ (la valeur de v_T a été déterminée à la question A.3).

Q13 13. Compte tenu de l'effet de fronde et de la courbe r en fonction de Δv, combien de passages à proximité de la Terre semblent nécessaires pour que la sonde soit assez légère pour être lancée par Ariane 5 ?

Q14 14. Pour quelle raison selon vous, l'usage de l'assistance gravitationnelle augmente-t-il la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

Données numériques :

- **Grandeurs physiques :**
  - Masse du soleil : $M_S = 2{,}0\,10^{30}$ kg
  - Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0\,10^{24}$ kg
  - Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = $150\,10^6$ km
  - Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4\,10^3$ km
  - Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67\,10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
  - Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0\,10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
  - Constante de Planck : $h = 6{,}63\,10^{-34}$ J·s
  - Charge élémentaire : $e = 1{,}6\,10^{-19}$ C
  - Masse d'un électron : $m = 9{,}1\,10^{-31}$ kg
  - Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
  - 1 électron-volt = $1{,}6\,10^{-19}$ J
- **Données techniques relatives à Rosetta :**
  - Masse à vide de Rosetta : 1300 kg
  - Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : 6950 kg
- **Caractéristiques de la comète Tchourioumov-Guérassimenko :**
  - Distance du Soleil au moment du rendez-vous avec Rosetta : 3,3 ua
  - Diamètre du noyau = 4 km
  - Albédo du noyau : (fraction du rayonnement solaire incident réfléchie par le noyau) = 4%
- **Constante solaire :**
  La constante solaire exprime l'énergie que recevrait du soleil par seconde une surface de 1 m^2 située à une distance 1 ua (distance moyenne Terre-Soleil), exposée perpendiculairement aux rayons du Soleil (en l'absence d'atmosphère). Elle s'exprime en watt par mètre carré ($\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$). Elle vaut $F = 1{,}36\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

À propos de la sonde Rosetta

D'après Concours EPITA IPSA 2015

4.1 Question Préliminaires

Q15 1. $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. $d\,E_p = -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -\vec{F}\cdot(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi) = \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}dr$ donc $E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r} + cte$.
L'habitude est de prendre la constante nulle pour que l'énergie potentielle soit nulle quand $r \to \infty$ soit $\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}}$.

Q16 2. On a affaire à un mouvement à force centrale. Par application du théorème du moment cinétique dans le référentiel géocentrique, par rapport à O fixe (centre du soleil), $\frac{d\vec{L}_0(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = r.\vec{e}_r\wedge F_r.\vec{e}_r = \vec{0}$ d'où
$\boxed{\text{conservation du moment cinétique}}$ de la planète et en notant $\vec{L} = L.\vec{e}_z = M_P\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$. Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{L}$ sont orthogonaux. O étant fixe, M doit être dans un plan orthogonal à $\vec{L}_O$ (fixe) et contenant O (un vecteur normal et un point définissent un plan) : un seul plan vérifie ces deux conditions à condition que $\vec{L}_O \neq \vec{0}$.
$\boxed{\text{Le mouvement reste dans le plan normal à } \vec{e}_z}$.

Q17 3. Plusieurs moyens sont possibles : (on se place maintenant en coordonnées polaires dans le référentiel héliocentrique.)
   - Conservation du moment cinétique : $L = r^2\dot{\theta}$ est constant, r est constant, donc $\dot{\theta}$ est aussi constant donc $\boxed{\text{le mouvement est uniforme}}$.
   - Théorème de la puissance cinétique : la vitesse est selon $\vec{e}_\theta$, la force selon $-\vec{e}_r$ donc la puissance est nulle. $\boxed{\text{Le mouvement est uniforme}}$.

— PFD projeté sur $\vec{e}_\theta$: $0 = r\ddot{\theta}$ donc $\dot{\theta} = cte$. $\boxed{\text{Le mouvement est uniforme}}$.
Pour obtenir la vitesse, une bonne idée est le PFD, puisque le mouvement est circulaire uniforme $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}$ d'où $v^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r}$. Finalement $\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67E-11\times 2{,}0E30}{150E9}} = 30 \text{ km/s}}$.

Q18 4. Question de cours : on cherche l'énergie mécanique au périgée r_p et à l'apogée r_a. En ces points, $\dot{r} = 0$ puisque ce sont des extremums de $r(t)$.

> ***Évitez la notation $\dot{r}_m = 0$. C'est un peu maladroit vu que r_m est un nombre et non pas une fonction du temps. C'est $\dot{r}(t = t_m)$ qui nous intéresse.***

De plus, la seule force présente est conservative, donc l'énergie mécanique est constante :

$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}mr_a^2\dot{\theta}_a^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_a} \\ E_m = \frac{1}{2}mr_p^2\dot{\theta}_p^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_p} \end{cases}$$

Or, le moment cinétique se conserve, d'où $C = r^2\dot{\theta}$ se conserve

$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}mr_a^2\frac{C^2}{r_a^4} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_a}(1) \\ E_m = \frac{1}{2}mr_p^2\frac{C^2}{r_p^4} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_p}(2) \end{cases}$$

à partir de là, 2 manières de résoudre :
<u>version 1</u> : r_a et r_p sont solution de l'équation $E_m \times r^2 + \mathcal{G}Mm \times r - \frac{1}{2}mC^2$. D'après notre cours de math, on sait que pour une équation du second degré $\alpha x^2 + bx + c$, la somme des solutions vaut $-b/\alpha$, donc ici $r_a + r_p = \frac{\mathcal{G}Mm}{E_m}$ or $2a = r_p + r_a$ donc $\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}}$.
<u>version 2</u> : On essaye de faire disparaitre C par des combinaisons linéaires puisqu'on ne le connait pas. On multiplie la première équation par r_a^2, la deuxième par r_p^2 et on soustrait $E_m(r_a^2 - r_p^2) = -\mathcal{G}Mm(r_a - r_p)$

$E_m(r_a - r_p)(r_a + r_p) = -\mathcal{G}Mm(r_a - r_p) \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}}$

4.2 Ellipse de Hohmann

Q19 5. On passe de $E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{2R_1}$ à $E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1+R_2}$
l'énergie mécanique juste avant est telle que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1} = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{2R_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}$$

l'énergie mécanique juste après est telle que

$$\frac{1}{2}m(v_1 + \Delta v)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1} = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{R_1 + R_2} \Rightarrow (v_1 + \Delta v)^2 = 2\mathcal{G}M_S\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 + \Delta v = \sqrt{\mathcal{G}M\frac{2R_2}{R_1(R_1 + R_2)}}$$

On en déduit : la formule de l'énoncé en injectant v_1 dans la 2^e équation

$$\boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right)}$$

Q20 6. Il faut d'abord déterminer R_2
$R_2 + R_1 = 2a$ avec $R_1 = 1$ ua et $a = 3{,}5$ ua, donc $R_2 = 6$ ua

Q21 7. On en déduit
$\Delta v_1 = v_T \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right) = 29{,}821 \left(\sqrt{\frac{2\times 6}{1+6}} - 1\right) = \boxed{9\,\text{km/s}}$
On ne donne qu'un chiffre significatif car R_1 n'est donné qu'avec un chiffre (« environ 1 u.a. »).

4.3 Lien entre budget Δv et carburant

Q22 8. On part de la formule de l'énoncé :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_e \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}v_e \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt}\,dt = -v_e \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\,dt$$

On reconnait à gauche une intégrale du type $\int f'(x)\,dx$, où la primitive est f et à droite $\int f'(x)/f(x)\,dx$ où la primitive est $\ln(f)$.

$$v(t_2) - v(t_1) = -v_e \ln\frac{m(t_2)}{m(t_1)} \Leftrightarrow \Delta v = v_e \ln\frac{m(t_1)}{m(t_2)} = \boxed{v_e \ln\frac{m+\Delta m}{m}}$$

m correspond donc à la masse après, et puisque Δm a été perdu, on avait bien $m + \Delta m$ avant.

L'énoncé (tel qu'il a été donné au concours) n'était pas super clair sur le fait que m représentait la masse après l'accélération plutôt qu'avant (auquel cas la masse après aurait été $m - \Delta m$), mais cela se comprend une fois qu'on a résolu la question. Attention à justifier les bornes de l'intégrale.

Cette formule est intéressante : grâce à la présence du logarithme, on comprend pourquoi il suffit d'additionner les Δv au cours du trajet :

$$v(t_3) - v(t_1) = v(t_3) - v(t_2) + v(t_2) - v(t_1) = v_e \ln\left(\frac{m(t_2)}{m(t_3)} \times \frac{m(t_1)}{m(t_2)}\right) = v_e \ln\left(\frac{m(t_1)}{m(t_3)}\right)$$

Ainsi, en faisait la somme des Δv au cours du trajet il est possible de connaitre le cout total en carburant assez facilement.

9. On utilise le résultat précédent, et en particulier la généralisation vue à l'ensemble du trajet :

$$\Delta v = v_e \ln\frac{m+\Delta m}{m} \Leftrightarrow 1 + \frac{\Delta m}{m} = \exp\frac{\Delta v}{v_e} = 1 + r$$

Q23 On a donc $\boxed{r = \exp\frac{\Delta v}{v_e} - 1}$ ce qui est cohérent avec la courbe représentée dans l'énoncé.

Q24 10. (a) Il n'y a pas de partie mobile donc $w_u = 0$ et la détente est supposée adiabatique donc $q = 0$. D'où $\boxed{w_u + q = 0}$.

Q25 (b) Pour un gaz parfait h ne dépend que de la température, d'où $\Delta h = c_p \Delta T$. Or $C = nC_{p,m} = mc_p$ d'où $c_p = C_{p,m}/M$. Puisque l'on néglige la température de sortie devant la température d'entrée, on a donc $h_s - h_e = \frac{C_{p,m}}{M}(T_s - T_e) \simeq \boxed{-\frac{C_{p,m}}{M}T_e}$ avec T_e la température de combustion.

Q26 (c) On en déduit $\boxed{v_e = v_s = \sqrt{\frac{2C_{p,m}T_e}{M}} = 3\,\text{km/s}}$.

Q27 11. D'après l'énoncé, Δv est de l'ordre de 9,2 km/s. On a donc $r \simeq 13$ d'après le graphique.
D'après l'énoncé, la masse à vide de Rosetta est de 1300 kg. Si r vaut 13, cela veut dire que la masse de carburant est $13 \times 1300 = 16{,}9 \times 10^3$ kg.
Or il faut encore rajouter la masse à vide et la charge utile d'Ariane est deux à trois fois inférieure !
Il n'est donc $\boxed{\text{pas possible}}$ d'envoyer en orbite une charge si élevée à l'aide d'Ariane et il faut donc réduire les besoins en carburant.

4.4 Fronde gravitationnelle

Q28 12. On veut montrer que l'on a $V_1 = V_2$. On utilise la conservation de l'énergie mécanique. À l'infini $E_p = 0$ et par conservation $E_{m,1} = E_{m,2}$ d'où $E_{c,1} = E_{c,2}$ d'où $\boxed{v_1 = v_2}$.

13. Dans le référentiel héliocentrique : $\vec{v_i} = \vec{v_1} + \vec{v_T}$ et $\vec{v_f} = \vec{v_2} + \vec{v_T}$. De plus, $\Delta v = \sqrt{\vec{v}_f^2} - \sqrt{\vec{v}_i^2}$. Au début : $\vec{v}_i^2 = V^2 + v_t^2$ car les vecteurs sont orthogonaux. À la fin, c'est un peu plus compliqué : $\vec{v_f} = v_t\vec{e}_y + V\sin\theta\vec{e}_y + V\cos\theta\vec{e}_x$ d'où $\vec{v}_f^2 = (v_t + V\sin\theta)^2 + V^2\cos^2\theta = v_t^2 + 2v_tV\sin\theta + V^2$. On a donc
Q29 $\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2 + 2Vv_T\sin\theta} - \sqrt{V^2 + v_T^2}$ soit

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2Vv_t}{V^2+v_T^2}\sin\theta} - 1\right) = 3\,\text{km/s}}.$$

Q30 14. Une fronde permet donc de réduire Δv d'environ 3,3 km/s. Pour pouvoir décoller, il faut que la masse à vide de la sonde m_v plus la masse de carburant soit inférieur à la charge utile m_u du lanceur Ariane, soit $m_v(1+r) < m_u$ soit $r < \frac{m_u}{m_v} - 1 \simeq 4{,}3$. Graphiquement, cela correspond approximativement à $\Delta v < 6\,\text{km/s}$. Une fronde est donc presque suffisante (puisque cela amène Δv de 9,2 km/s à 5,9 km/s. Toutefois les lecture graphique n'ont pas été faites très précisément et cela correspond à une situation un peu limite, alors qu'avec deux froids, le Δv restant à faire est de 2,6 km/s, soit r de l'ordre de 2 et il y a de a marge.

Q31 15. Il faut faire plusieurs révolution autour du Soleil afin de revenir à proximité de la Terre alors que pour un trajet direct, une demi-révolution suffit.