Pression de radiation

Remarque : Bien qu'il soit conseillé de traiter le problème dans l'ordre, les dernières questions de la partie C peuvent en grande partie être traitées même si le reste du problème n'a pas été abordé en admettant l'expression de la force proposée par l'énoncé.

Dans ce problème, on étudie un moyen « gratuit » (en carburant) de propulsion spatiale : l'utilisation de la pression de radiation lors de la réflexion de la lumière sur un miroir. Il s'agit d'utiliser la force créée lors de la réflexion des photons sur un miroir afin de mettre en mouvement des objets.
On notera S la surface de la « voile solaire » considérée. Elle est supposée parfaitement réfléchissante, c'est-à-dire que la voile solaire est un miroir parfait.
Dans une première partie, on étudiera le cas où la voile est immobile dans un référentiel galiléen et où la lumière est en incidence normale. Dans la deuxième partie on étudiera le cas où l'angle d'incidence est non nul. Finalement dans la troisième partie, on tiendra compte du mouvement du miroir.
On notera λ la longueur d'onde de la lumière incidente et ν sa fréquence.
$h =$ représente la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Données numériques :

grandeur	symbole	valeur
flux solaire au niveau de l'orbite terrestre	Φ	$1{,}3608\,\mathrm{kW/m^2}$
constante gravitationnelle	$\mathcal{G}$	$6{,}67384 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
masse du soleil	M_S	$1{,}9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
distance moyenne Terre-soleil	d_{TS}	$1\ \mathrm{u.a.} = 149{,}60 \times 10^{9}\,\mathrm{m}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$

0.1 Cas de l'incidence normale

Dans cette partie, on considère que la lumière arrive sur le miroir en incidence normale, c'est-à-dire que la surface du miroir est orthogonale à la direction de propagation. Le miroir étant immobile dans le référentiel de l'étoile considéré comme galiléen, on ne considère pas de changement de longueur d'onde lors de la réflexion.
On notera $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire dirigée selon la lumière incidente.

Q1 1. Rappeler les relations de Planck-Einstein pour un photon (impulsion $\vec{p}$ et énergie E_0 d'un photon).

Q2 2. Le flux solaire Φ est la puissance surfacique provenant du soleil lorsque la surface considérée est orthogonale à la direction de propagation de la lumière. En déduire la puissance P arrivant sur le miroir, puis l'énergie correspondant pendant un court intervalle de temps $\mathrm{d}t$.

Q3 3. Compte tenu des questions précédentes, déterminer le nombre de photons δN frappant le miroir entre t et $t + \mathrm{d}t$.

Q4 4. On considère le système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + \mathrm{d}t$}. Calculer la variation de quantité de mouvement du système entre t et $t + \mathrm{d}t$: $\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t)$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t) = -2\frac{\Phi S \mathrm{d}t}{c}\vec{e}_x$$

Q5 5. En déduire la force exercée par le miroir sur le système, puis celle exercée par les photons sur le miroir.

Q6 6. Exprimer alors la pression correspondante p_r, appelée pression de radiation, en fonction de Φ et de c.

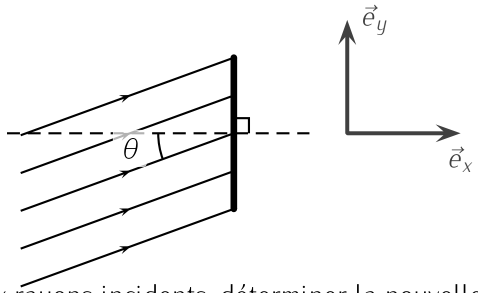
Q7 7. Vérifier explicitement l'homogénéité du résultat obtenu à la question précédente.

Q8 8. Application numérique : au niveau de l'orbite terrestre, on considère une voile de surface $S = 100{,}0\,\mathrm{m^2}$. Calculer la force due à la pression de radiation. Comparer avec la force exercée par le soleil sur un objet de $20{,}00\,\mathrm{kg}$ (toujours au niveau de l'orbite terrestre). Commenter [1].

1. Remarque : le flux solaire décroit en $1/r^2$ à cause de la conservation de l'énergie, la force gravitationnelle est elle aussi en $1/r^2$, donc le rapport entre ces deux forces est en fait indépendant de la distance au soleil.

Q9 9. Peut-on utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil ?

0.2 Cas de l'incidence oblique



On étudie maintenant le cas où la lumière incidente fait un angle θ avec la normale au miroir. Compte tenu de la distance au soleil et des angles mis en jeu, on considèrera que la lumière arrive sur le miroir sous la forme d'un faisceau de rayons parallèles.

Q10 1. Le flux solaire Φ étant défini par rapport à une surface normale aux rayons incidents, déterminer la nouvelle puissance arrivant sur la voile solaire $P(\theta)$ en fonction de θ, S et Φ (un schéma indiquant clairement les surfaces en jeu est vivement recommandé). En déduire l'énergie δE arrivant pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$.

Q11 2. Étudier la variation de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_0}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{p_0}(t)$ pour un seul photon lors du choc. On exprimera le résultat en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. En déduire la variation de quantité de mouvement du système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$} : $\overrightarrow{\mathcal{P}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t)$.

Q12 3. Montrer que la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $p_r = 2\frac{\Phi}{c}\cos^2\theta$.

0.3 Prise en compte du mouvement de la voile

Intuitivement, on peut se douter que si la fréquence de la lumière ne varie pas lors de la réflexion, alors l'énergie mécanique totale du système { photons + miroir } pourrait augmenter sans raison. Dans cette question, on souhaite modéliser plus précisément la force lorsque le miroir est en mouvement. Toutefois, pour plus de simplicité et pour ne pas avoir à considérer des effets relativistes, le raisonnement sera mené sur un cas classique où les photons seront remplacés par des balles de tennis.

Gaston souhaite vous faire étudier un nouveau mode de propulsion pour sa voiture de masse M : il projette des balles de tennis de masse m_t contre sa voiture à une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$. On négligera les mouvements selon les autres directions que $\vec{e}_x$, en particulier on ne tiendra pas compte de la gravité.

On notera n^* le nombre de balle de tennis par unité de volume, supposé constant et connu. On notera $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$ la vitesse de la voiture. On notera S la surface (verticale) de la voiture contre laquelle cogne les balles de tennis.

On travaillera parfois dans le référentiel terrestre (galiléen), noté $\mathcal{R}_T$, et parfois dans le référentiel lié à la voiture et en translation par rapport à $\mathcal{R}_T$, noté $\mathcal{R}_V$ (non galiléen a priori). Les vitesses précédemment définies le sont par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$.

On donne la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$$

Ainsi pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_T$, il faut ajouter $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_V$ et réciproquement, pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_V$, il faut soustraire $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_T$.

Q13 1. Intuitivement, quelle est la vitesse maximale v_m à laquelle Gaston pourra amener sa voiture ? Justifier brièvement.

Dans les questions suivantes, on fera l'hypothèse que $v_x \leq v_m$.

Q14 2. On se place dans le référentiel lié à la voiture $\mathcal{R}_V$, quelle est la vitesse $\vec{v}_0' = v_0'\vec{e}_x$ des balles de tennis dans ce référentiel ?

Q15 3. En déduire le nombre de balles de tennis frappant la voiture entre t et $t+\mathrm{d}t$ en fonction de v_0', puis en fonction de v_0 et v_x.

Q16 4. On considère que les balles rebondissent en repartant à la vitesse $-v_0'\vec{e}_x$ dans le référentiel de la voiture (ce qui revient à supposer que la masse de la voiture est bien supérieure à celle d'une balle de tennis). En déduire que la vitesse $\vec{v}_0'' = v_0''\vec{e}_x$ des balles après leur rebond, dans le référentiel terrestre en vaut

$$\vec{v}_0'' = 2\vec{v} - \vec{v}_0$$

Q17 5. En utilisant les questions précédentes, déterminer la variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre entre t et $t+\mathrm{d}t$ du système fermé $\mathcal{S} = \{$les balles qui vont frapper la voiture entre t et $t+\mathrm{d}t\}$.

Q18 6. Montrer alors que la force exercée **par** les balles de tennis **sur la voiture** s'exprime

$$\vec{F}_{t\to v} = 2n^* S m_t (v_0 - v_x)^2 \vec{e}_x$$

Q19 7. Vérifier l'homogénéité de la formule précédente.

Q20 8. En déduire l'équation du mouvement sur v_x vérifiée par la voiture de masse M.

Q21 9. L'équation précédente étant non linéaire, une résolution analytique n'est pas facile. Pour obtenir des informations sur les solutions, tracer le portrait de phase ($\dot{v}_x$ en fonction de v_x) correspondant sans oublier de l'orienter.

Q22 10. À l'aide du portrait de phase, et en justifiant votre réponse, conclure quant à l'existence d'une vitesse limite que l'on précisera. Comparer avec votre intuition au début de la partie. (Remarque : attention, il se peut qu'une partie de la courbe que vous avez tracé à la question précédente ne soit pas pertinente compte tenu de l'hypothèse $v_x \leq v_m$).

Pression de radiation

Attention au nombre de chiffres significatifs dans les applications numériques : l'énoncé donnait ici les valeurs avec en général un grand nombre de chiffre.

0.4 Cas de l'incidence normale

Q23 1. $\boxed{E_0 = h\nu}$ et $\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire selon la direction et le sens de propagation de la lumière.

Q24 2. $\boxed{P = \Phi \times S}$ par définition puisque le miroir est orthogonal à la direction de propagation. D'où $\boxed{\delta E = P\mathrm{d}t = \Phi S\mathrm{d}t}$.

Q25 3. Compte tenu des questions précédentes, l'énergie arrivant sur le miroir entre t et $t+\delta$ peut s'exprimer sous la forme $\delta N \times h\nu$ ou $\Phi S \mathrm{d}t$. On en déduit que $\boxed{\delta N = \frac{\Phi S \mathrm{d}t}{h\nu}}$.

Q26 4. On considère le système fermé { les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$}. Lorsqu'un photon est réfléchi, sa variation de quantité de mouvement est $\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \frac{h}{\lambda}(-\vec{e}_x) - \frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = -2\frac{h}{\lambda}\vec{e}_x$.

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t) = \delta N \times (-2\frac{h}{\lambda}\vec{e}_x) = -2\frac{\Phi S \mathrm{d}t}{h\nu}\frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = \boxed{-2\frac{\Phi S \mathrm{d}t}{c}\vec{e}_x}$$

5. D'après la question précédente

$\frac{\overrightarrow{\mathcal{P}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boxed{-2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x}$ soit en prenant la limite lorsque $\mathrm{d}t \to 0$: $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{P}}}{\mathrm{d}t} = -2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x$

Q27 Le référentiel de l'étoile étant galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au système fermé défini précédemment :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{P}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{miroir\to photons} \Leftrightarrow -2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x = \vec{F}_{miroir\to photons}$$

d'où d'après la troisième loi de Newton $\boxed{\vec{F}_{photons\to miroir} = 2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x}$.

Q28 6. La pression correspondante, est telle que $\vec{F}_{photons\rightarrow miroir} = p_r S\vec{e}_x$, soit $\boxed{p_r = 2\frac{\Phi}{c}}$.

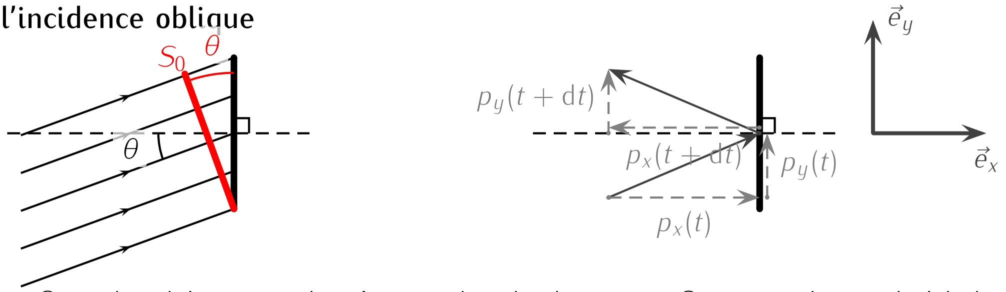
Q29 7. Dimensionnellement une pression peut être vue comme une force surfacique ou une énergie volumique. Ici nous allons utiliser énergie volumique
$\left[\frac{\Phi}{c}\right] = \frac{[P]\text{L}^{-2}}{\text{L.T}^{-1}} = \frac{[E]\text{T}^{-1}\text{L}^{-2}}{\text{L.T}^{-1}} = [E]\,\text{L}^{-3}$ On a donc une énergie volumique des deux cotés du signe égal, la formule est $\boxed{\text{homogène}}$.

> ***Pensez à conclure pour vos analyse dimensionnelle. Dites que la formule est homogène (si elle l'est).***

Q30 8. Application numérique :
On trouve $\boxed{F_{grav} = 0{,}1186\,\text{N}}$ et $\boxed{F_{rad} = 9{,}078 \times 10^{-4}\,\text{N}}$ soit 130,7 fois plus petite. (4 chiffres significatifs comme la masse ou la surface).
Ainsi, pour pouvoir utiliser la pression de radiation, il faut donc des surfaces de voile gigantesques, mais très légère. L'énergie est « gratuite », mais très très faible.

Q31 9. On ne peut pas utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil directement car la force exercée est telle que « les photons repoussent la voile », ce même si l'incidence n'est pas normale comme ce sera vu dans la partie suivante. Les photons étant émis par le soleil et se propageant en ligne droite, ils ont tendance à éloigner la voile du soleil.
On peut malgré tout envisager de se rapprocher du soleil par des moyens détourner : utiliser la pression de radiation pour se rapprocher d'une planète massive puis utiliser le principe de la fronde gravitationnelle pour se rapprocher du soleil (en « rentrant »la voile après passage à proximité de la planète).

0.5 Cas de l'incidence oblique



1. La surface S_0 sur le schéma reçoit le même nombre de photon que S, et est orthogonale à la lumière incidente.
Q32 Ainsi, la puissance arrivant sur S est $\boxed{P(\theta) = \Phi S_0 = \Phi S\cos\theta}$. On en déduit $\boxed{\delta E = \Phi S \mathrm{d}t\cos\theta}$.
2. Lors du choc d'un photon, la composante selon y de $\vec{p}$ est conservée et celle selon x change de sens (loi de la réflexion pour la lumière, voir schéma ci-dessus à droite).
Ainsi $\vec{p}_0(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}_0(t) = (p_x(t+\mathrm{d}t) - p_x(t))\vec{e}_x + 0\vec{e}_y = -2p_0\cos\theta\vec{e}_x$
D'où $\boxed{\vec{p}_0(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}_0(t) = -2\frac{h}{\lambda}\cos\theta\vec{e}_x}$.
On en déduit que la variation de quantité de mouvement du système fermé { les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$} est $\vec{\mathcal{P}}(t+dt) - \vec{\mathcal{P}}(t) = \delta N \times (\vec{p}_0(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}_0(t)) = \frac{\Phi S\mathrm{d}t\cos\theta}{h\nu} \times \left(-2\frac{h}{\lambda}\cos\theta\vec{e}_x\right)$.
Q33 Soit en simplifiant $\boxed{\vec{\mathcal{P}}(t+dt) - \vec{\mathcal{P}}(t) = -2\frac{\Phi S\mathrm{d}t\cos^2\theta}{c} \times \vec{e}_x}$.
3. Ainsi, en utilisant le PFD pour le système fermé défini par l'énoncé dans le référentiel galiléen lié à l'étoile : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{miroir\rightarrow photons} = -2\frac{\Phi S\cos^2\theta}{c} \times \vec{e}_x$. D'où en utilisant la troisième loi de Newton comme précédemment $\vec{F}_{photons\rightarrow miroir} = 2\frac{\Phi S\mathrm{d}t\cos^2\theta}{c} \times \vec{e}_x$ et par définition de la pression : $\vec{F}_{photons\rightarrow miroir} = p_r S\vec{e}_x$ d'où en
Q34 projettant selon $\vec{e}_x$ la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $\boxed{p_r = \frac{2\Phi}{c}\cos^2\theta}$.

0.6 Prise en compte du mouvement de la voile

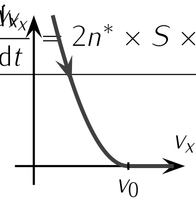
1. Lorsque Gaston envoie des balles, il faut que celles-ci aillent plus vite que la voiture pour pouvoir entrer en collision avec celle-ci. Autrement dit, si $v_x > v_0$, aucune balle n'atteindra la voiture et donc aucune force
Q35 ne pourra être exercée. On s'attend donc à ce que la vitesse maximale accessible soit $\boxed{v_0}$.

2. On utilise la relation donnée par l'énoncée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$ soit en projetant selon $\vec{e}_x$:
Q36 $v_0 = v_0' + v_x$ d'où $\boxed{v_0' = v_0 - v_x}$.
3. On en déduit que les balles de tennis frappant la voiture entre t et $t + \mathrm{d}t$ doivent être en face de S, suffisamment proches pour avoir le temps de heurter la paroi (c'est à dire à une distance inférieure à la distance parcourue pendant $\mathrm{d}t$, soit $v_0'\mathrm{d}t$). Elles sont donc contenues dans un cylindre de volume $S \times v_0'\mathrm{d}t$
Q37 et sont donc au nombre de $\boxed{\delta N = n^* \times S \times v_0'\mathrm{d}t}$.
4. On utilise la relation donnée par l'énoncée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$ soit : $v_0''\vec{e}_x = -v_0'\vec{e}_x + v_x\vec{e}_x$ et en
Q38 utilisant l'expression de v_0' trouvée précédemment $v_0''\vec{e}_x = -(v_0 - v_x)\vec{e}_x + v_x\vec{e}_x = \boxed{(2v_x - v_0)\vec{e}_x}$. Soit aussi $\boxed{\vec{v}_0'' = 2\vec{v} - \vec{v}_0}$.
5. La variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre est donc
$\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + dt) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t) = \delta N m_t(\vec{v}_0'' - \vec{v}_0) = n^* \times S \times v_0'\mathrm{d}t \times m_t \times (2\vec{v} - \vec{v}_0 - \vec{v}_0)$ et en utilisant l'expression de
Q39 $v_0' = v_0 - v_x$ $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{P}}(t + dt) - \overrightarrow{\mathcal{P}}(t) = -2n^* \times S\mathrm{d}t \times m_t \times (v_x - v_0)^2\, \vec{e}_x}$.
Q40 6. Toujours de la même façon en utilisant le PFD puis la troisième loi de Newton
$\boxed{\vec{F}_{tennis \rightarrow voiture} = -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{P}}}{\mathrm{d}t} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2\, \vec{e}_x}$.

Il était important de se placer dans le référentiel terrestre pour la quantité de mouvement car il est galiléen alors que celui lié à la voiture n'est a priori pas galiléen puisque la voiture accélère lentement mais surement à chaque choc.

7. (a) Pour le membre de gauche $[F] = \mathrm{M.L.T^{-2}}$
   (b) Pour le membre de droite : il y une différence entre deux vitesses, ce qui ne pose pas de problème d'homogénéité. De plus :
      i. $[n^*] = \mathrm{L^{-3}}$
      ii. $[S] = \mathrm{L^2}$
      iii. $[m_t] = \mathrm{M}$
      iv. $[v_x] = \mathrm{L.T^{-1}}$

   d'où le membre de droite est homogène à $\mathrm{L^{-3}.L^2M}\left(\mathrm{L.T^{-1}}\right)^2$ soit $\mathrm{M.L.T^{-2}}$
Q41 Le membre de droite et celui de gauche sont de la même dimension, la formule est donc homogène.
8. On considère le système {voiture } dans le référentiel terrestre galiléen, d'après le PFD, l'équation du mou-
Q42 vement est donc $M\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2\, \vec{e}_x$ soit en projetant selon $\vec{e}_x$ $\boxed{M\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2}$.
Q43 9. La courbe est représentée ci-contre à droite.



10. On obtient une parabole qui passe par 0 en v_0. La partie de droite de la courbe n'est plus une parabole mais une droite horizontale puisque la force est nulle si $v_x \gg v_0$. Le portrait de phase est orientée vers la droite puisque $\dot{v}_x > 0$, ainsi la vitesse de la voiture augmente jusqu'à atteindre v_0, vitesse à partir de laquelle $\dot{v}_x = 0 \Rightarrow v_x = cte = v_0$.
Q44 Ce résultat est cohérent avec la vitesse limite proposée au début de la partie (même si l'on avait prolongé la parabole par erreur, $v_x = v_0$ est un point d'arrêt).