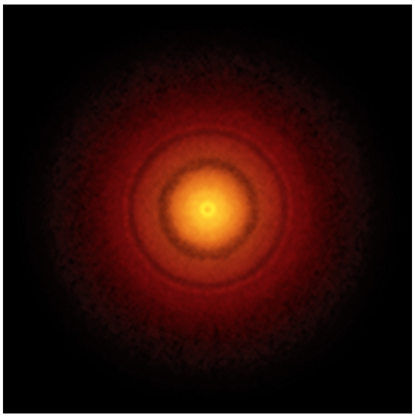
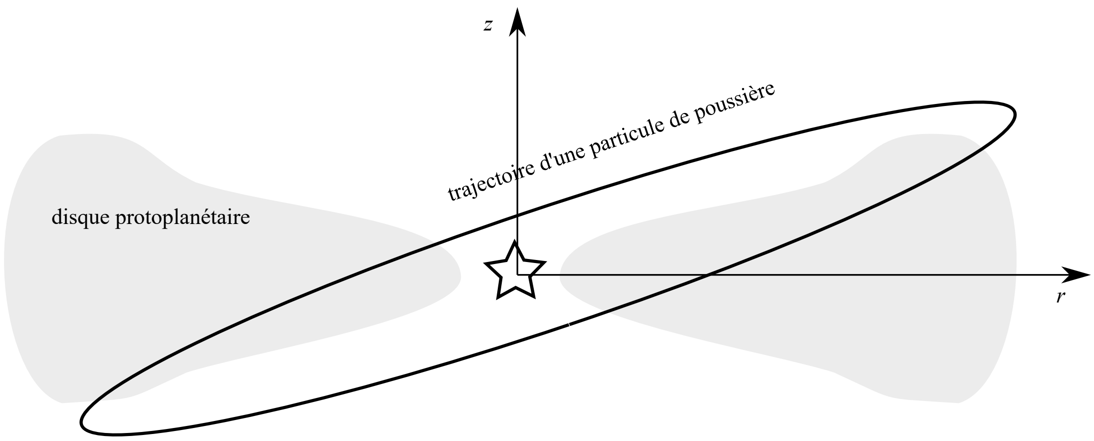
Disque protoplanétaire



Il existe, à ce jour, deux scénarios possibles pour la formation des planètes. Dans le premier, les planètes se forment lorsque le nuage de gaz entourant une jeune étoile devient gravitationnellement instable et qu'il se fragmente pour former des protoplanètes gazeuses (comme Jupiter) en seulement mille à dix mille ans. Ce processus génère des planètes à grandes distances de leur étoile (>100 U.A, où 1 U.A. est une Unité Astronomique, soit la distance moyenne Terre-Soleil) avec des masses de 10 à 20 fois celles de Jupiter. La majeure partie des exoplanètes détectées jusqu'à présent, orbitent autour de leur étoile à des distances inférieures à 10 U.A. et ont des masses bien plus faibles. Dans ce cas, c'est le scénario dit d'accrétion qui entre en jeu au sein du disque protoplanétaire (photo ci-contre). Des grains de poussière microscopiques (0,1 à 1 μm) se collent les uns aux autres lors de collisions jusqu'à former des cailloux centimétriques puis des protoplanètes. Ce sujet traite de ce scénario d'accrétion. Il est constitué de 4 parties, les parties 1 et 4 sont indépendantes des deux autres.

1 Sédimentation verticale de la poussière

Lors de la formation d'une étoile, les interactions gravitationnelles entrainent la rotation du nuage de gaz entourant celle-ci. Ce nuage prend alors la forme d'un disque, appelé disque protoplanétaire (voir schéma ci-dessous).



Q1 1. On étudie le mouvement d'une particule de poussière au sein du nuage protoplanétaire dans un référentiel lié à l'étoile et supposé galiléen. On repère le mouvement de la particule dans les coordonées cylindriques associées à une base $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$. Celle-ci évolue à rayon r constant et également à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. La force d'interaction gravitationnelle qu'elle subit de la part de l'étoile s'écrit : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_E m}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} \left(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}\right)$, où M_E est la masse de l'étoile, m la masse de la poussière et $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle. Montrer qu'à r fixé, l'équation du mouvement vertical peut s'écrire de façon approchée sous la forme $\ddot{z} = -\omega^2 z$ dans le cas où le disque est considéré comme mince (*i.e.* son épaisseur est faible devant son rayon, $|z| \ll r$).

   Quelle doit-être la dimension de ω ? Le vérifier sur l'expression littérale trouvée.

Q2 2. Comment s'appelle un système décrit par une telle équation ? Peut-elle donner naissance à une sédimentation verticale de la poussière, c'est-à-dire à une accumulation de la poussière dans le plan $z = 0$?

Q3 3. On ajoute au modèle précédent une force d'interaction entre la particule de poussière et le gaz. Cette force est une force de frottement fluide du type : $\vec{f_v} = -\beta v\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse **relative** de la particule par rapport au gaz. On considère toujours le cas $r = R = cste$, on peut raisonnablement ajouter que la particule de poussière et le gaz tourne autour de l'étoile à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Montrer que dans ce cas l'équation différentielle qui régit le mouvement vertical de la particule est : $\ddot{z} = -\omega^2 z - \frac{\beta}{m}\left|\dot{z}\right|\dot{z}$.

Q4 4. On peut résoudre analytiquement cette équation différentielle en introduisant les grandeurs $v_+ = \dot{z}$ si $\dot{z} > 0$ et $v_- = -\dot{z}$ si $\dot{z} < 0$. Montrer que v_- est solution de $v_- \frac{dv_-}{dz} = -\omega^2 z + \mu v_-^2$, où $\mu = \frac{\beta}{m}$. Quelle est la dimension de $\frac{1}{\mu}$?

Q5 5. Montrer alors que $v_-^2 = A \exp(2\mu\, z) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}$, où A est une constante que l'on ne déterminera pas pour l'instant. On pourra poser $f = v_-^2$ et remarquer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 2v_- \frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}z}$.

Q6 6. Déterminer A dans le cas d'une particule partant de $z = z_0$ avec une vitesse verticale nulle, c'est-à-dire $v_-(z_0) = 0$.

Q7 7. En déduire que l'altitude de rebroussement notée z_1 (c'est-à-dire l'altitude pour laquelle la vitesse verticale s'annule) est solution de $-\left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}\right) \exp(2\mu(z_1 - z_0)) + \frac{\omega^2 z_1}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} = 0$.

Q8 8. Que vaut approximativement l'altitude de rebroussement dans le cas où $z_0 \gg \frac{1}{\mu}$? (On montrera que le terme en exponentiel est négligeable). Cette situation correspond-elle à un arrêt rapide ou lent du mouvement vertical ?

Q9 9. On suppose désormais que la particule part d'une distance très grande devant $\frac{1}{\mu}$ et que z reste grand devant $\frac{1}{\mu}$ tout au long de la trajectoire. Montrer dans ce cas que $\dot{z} \simeq -\omega\sqrt{\frac{z}{\mu}}$.

Q10 10. Résoudre cette équation différentielle en utilisant la méthode de séparation des variables, et montrer que $z = z_0 \left(1 - \frac{\omega t}{2\sqrt{\mu z_0}}\right)^2$.

Q11 11. En déduire l'expression de $\dot{z}(t)$ et montrer que la particule s'arrête au bout d'un temps $t_1 = 2\frac{\sqrt{\mu z_0}}{\omega}$.

Q12 12. Que vaut la position d'arrêt $(z(t_1))$? Que vaut la vitesse initiale $(\dot{z}(t = 0))$? Commenter.

Q13 13. Dans le cas où $z_0 \ll \frac{1}{\mu}$, interpréter le fait que $z_1 \simeq -z_0$.
Cette situation correspond à des oscillations de la particule de part et d'autre du plan $z = 0$ avec une amplitude lentement décroissante. Dans ce cas, on peut, comme dans les questions précédente résoudre l'équation du mouvement et on montre que l'amplitude décroit comme $\frac{1}{t}$.

Pour conclure cette partie, on vient de montrer qu'après une phase d'arrêt rapide (de l'ordre de $\frac{1}{\mu}$) la particule oscille autour du plan $z = 0$ avec une amplitude décroissante. Les particules de poussière finissent ainsi par se retrouver dans le plan $z = 0$.

2 Modèle d'accrétion simple

Après la sédimentation verticale commence une phase d'accrétion des grains de poussière. On considère un astre sphérique, appelé graine, de rayon R_G, en orbite autour d'une étoile. Cette graine se déplace dans le disque protoplanétaire qui est constitué d'un grand nombre de petits corps, répartis aléatoirement entrant en collision avec elle. On suppose que tous ces corps ont une même vitesse relative, v_r, par rapport à la graine. Comme le rayon de l'orbite de la graine est de l'ordre de 10^8 km et que la graine a une taille inférieure au km, on peut se contenter d'un modèle à une dimension, et on supposera que toutes les particules du disque protoplanétaire ont le même vecteur vitesse : $\vec{v_r} = v_r \vec{u_x}$. On notera $n^\star$ le nombre de particules par unité de volume, on négligera leur taille par rapport à la taille de la graine. De plus, on négligera les interactions gravitationnelles.

Q14 1. Faire un schéma de la situation en représentant le volume contenant les corps entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Q15 2. Combien de particules entrent en collision avec la graine entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$? On exprimera $\mathrm{d}N_{coll}$ en fonction de $n^\star$, R_G, $\mathrm{d}t$ et v_r.

Q16 3. On suppose que les particules du disque protoplanétaire ont une masse m, et que lors des collisions, elles se collent à la graine. Celle-ci restant sphérique avec une masse volumique $\rho_G = 500$ kg.m^{-3} constante. Exprimer la vitesse d'accrétion $\frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t}$ de la graine. En déduire que $R_G(t) = \frac{v_r n^\star m}{4\rho_G} t$ si l'on considère $R_G \simeq 0$ à $t = 0$.

Q17 4. Le disque protoplanétaire a une masse volumique $\rho_D = 5.10^{-7}$ kg.m^{-3}, la vitesse v_r vaut, en ordre de grandeur, 1 km/s. En déduire que le temps nécessaire pour que la graine atteigne une taille égale à la moitié de celle de la Terre (on rappelle $R_T = 6400$ km) vaut $t_{1/2} = \frac{2R_T\rho_G}{v_r\rho_D}$. Faire l'application numérique.

5. Les observations montrent que le temps de vie médian des disques protoplanétaires est compris entre 1 et
Q18 3 millions d'années[1]. Peut-on valider le modèle précédent ?

3 Modèle d'accrétion galopante

On choisit cette fois-ci de ne plus négliger l'interaction entre les particules du disque et la graine. On considère que la graine est au centre O d'un repère orthonormé d'un référentiel galiléen. Les particules (de masse m) du disque, sont cette fois-ci attirées par la graine de masse M. On étudie une particule ayant la vitesse $\vec{v_r}$ à l'infini. On définit la grandeur $b = \frac{L}{mv_r}$, où $\vec{L}$ est le moment cinétique en O de la particule.

Q19 1. Faire un schéma de la situation et donner une signification géométrique à b.

Q20 2. Montrer que, dans le référentiel lié à la graine, le mouvement de la particule est plan.

3. Que vaut l'énergie mécanique de la particule ? Quelle est la nature de sa trajectoire dans le référentiel lié
Q21 à la graine ?

Q22 4. On repère la particule dans les coordonées polaires. Montrer que son énergie mécanique peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}$, avec $E_{p,eff} = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_r^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$.

5. En déduire l'équation dont est solution la distance minimale d'approche r_{min} (i.e. la distance pour laquelle
Q23 $\dot{r} = 0$). On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

Q24 6. Redémontrer l'expression de la seconde vitesse cosmique, ou vitesse de libération, notée v_l.

Q25 7. Montrer que r_{min} est solution de $r_{min}^2 + R_G\frac{v_l^2}{v_r^2}r_{min} - b^2 = 0$

Q26 8. La graine ayant un rayon R_G non nul, montrer que la particule la heurte si $b^2 < R_G^2\left(1 + \frac{v_l^2}{v_r^2}\right)$.

Q27 9. En vous aidant des questions de la partie II, calculer le nombre de particules entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Q28 10. Exprimer, pour ce modèle, la vitesse d'accrétion $\frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t}$ en fonction de v_l, puis en fonction de R_G (Attention, M dépend de R_G...).

Q29 11. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir $R_G(t)$ (on prendra $R_G(t=0) = 0$). On rappelle qu'une primitive de $\frac{1}{a^2+x^2}$ est $\frac{1}{|a|}\arctan\frac{x}{a}$.

Q30 12. Pourquoi parle-t-on d'accrétion galopante ? Estimer le temps de formation de la planète.

Une modélisation plus complète du phénomène d'accrétion (prenant en compte par exemple, la déplétion en matière le long de la trajectoire de la protoplanète) donne un temps de formation typique compris en 1 et 10 millions d'années.

4 Une aide venue d'ailleurs

Le 19 Octobre 2017 un objet sombre a été découvert par le télescope Pan-STARR. Son excentricité étant supérieur à 1, sa trajectoire est hyperbolique signifiant qu'il ne provient pas du système solaire. Baptisé 1I/'Oumuamua, il est le premier objet interstellaire détecté. (Un second, 2I/Borissov a été détecté le 30 Aout 2019.) Ces objets interstellaires sont des résidus d'anciens systèmes planétaires. Leur présence permettrait également d'expliquer la formation rapide des planètes. Dans cette partie, on cherche à évaluer leur nombre au sein du disque protoplanétaire.

1. Un amas d'étoile nait généralement au sein d'une nébuleuse. La formation des étoiles au voisinage du système solaire consomme 10 à 30% de la masse de la nébuleuse. La plupart des étoiles formées ont une masse de 0,5 $M_\odot$, où $M_\odot$ est la masse du soleil. Evaluer la masse d'une nébuleuse (en fonction de $M_\odot$) qui
Q31 donnerait naissance à un amas de 5000 étoiles.

2. Il existe une corrélation entre la masse d'une nébuleuse et sa taille[2] :
Q32 $\log(M_{neb}) = 3{,}42 + 1{,}67\log R_{neb}$, où M_{neb} est la masse de la nébuleuse exprimée en masse solaire et R_{neb}, la taille de la nébuleuse en parsec (défini par 1 parsec $= \frac{648000}{\pi}$ u.a. , on rappelle qu'une unité astronomique

1. Richert, A. J. W., 2018, MNRAS, 477, 5191
2. Pfalzner, S., Kirk, H., Sills, A., et al. 2016, A&A, 586, A68

vaut exactement 149 597 870 700 m).
Évaluer la taille d'une nébuleuse donnant naissance à 5000 étoiles.

En déduire le volume V (en parsec cube, pc^3) de la nébuleuse correspondante si l'on suppose qu'elle a une forme sphérique.

Estimer enfin, toutours en pc^3 le volume v, de nébuleuse dans lequel chaque étoile puise sa matière pour se former.

Q33 3. Des extrapolations[3] faites à partir de mesures au sein du système solaire permettent d'estimer la densité d'objets interstellaires dont la taille est supérieure à 50 m à $n^\star_{ISO} = 10^{15}$ pc^{-3}. En déduire le nombre d'objets interstellaires présents dans le volume v calculé précédemment. Ces objets s'ajoutent aux grains de poussière du disque protoplanétaires.

Disque protoplanétaire

5 Sédimentation verticale de la poussière

Q34 1. On étudie une particule de masse dans un référentiel lié à l'étoile supposé galiléen, cette particule est soumise uniquement à l'interaction gravitationnelle d'expression :
$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_E m}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\left(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z\right)$

D'après la seconde loi de Newton on a : $m\vec{a} = \vec{F}$, avec $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$ (mvt à $r = cte$).
Ainsi, en projection selon l'axe (Oz) on obtient : $m\ddot{z} = -\frac{\mathcal{G}M_E m}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}z$

Dans l'hypothèse d'un disque mince $|z| \ll r$, donc $r^2 + z^2 \simeq r^2$.

On a bien en première approximation : $\boxed{\ddot{z} = -\omega^2 z}$ où $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_E}{r^3}}}$.

D'après l'équation différentielle qui doit être homogène, $[\ddot{z}] = [\omega^2 z]$. On a alors $[\omega] = T^{-1}$. On le vérifie également grâce à son expression littérale. On sait que $[F] = [\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}]$ donc $[\frac{\mathcal{G}M_E}{r^3}] = [\frac{F}{rM}] = [\frac{MLT^{-2}}{LM}] = T^{-2}$, c'est la bonne dimension.

Q35 2. L'équation différentielle obtenue est celle d'un $\boxed{\text{oscillateur harmonique}}$. La particule va osciller de part et d'autre du plan sans jamais tendre vers une position d'équilibre. On n'aura donc pas d'accumulation de poussière en $z = 0$. La résolution donne : $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Q36 3. D'après l'énoncé, le gaz et la particule de poussière tournent autour de l'étoile à la même vitesse angulaire. La vitesse du gaz est donc en moyenne $r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, le vecteur vitesse relative est $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z - r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{z}\vec{u}_z$ et sa norme vaut simplement $|\dot{z}|$.
On ajoute donc une force de frottement qui a donc pour expression $-\beta|\dot{z}|\dot{z}\vec{e}^z$. En appliquant de nouveau la seconde loi de Newton en projection selon l'axe Oz on trouve $\boxed{\ddot{z} = -\omega^2 z - \frac{\beta}{m}|\dot{z}|\dot{z}}$

Attention, l'on projette le pfd selon z, certes le terme $\vec{v}$ donne $\dot{z}$, mais le terme v est déjà un scalaire et n'a pas à être projeté. S'il ne s'agissait pas de la vitesse relative, on n'aurait pas $v = |\dot{z}|$. On a rencontré ce cas dans le cas des équations de chute libre avec frottement quadratique dans l'air : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \beta v\vec{v}$, ce qui se projette sur x par exemple en : $m\ddot{x} = 0 - \beta\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \times \dot{x}$. La force de frottement selon x n'est pas du tout $-\beta\dot{x}|\dot{x}|$.

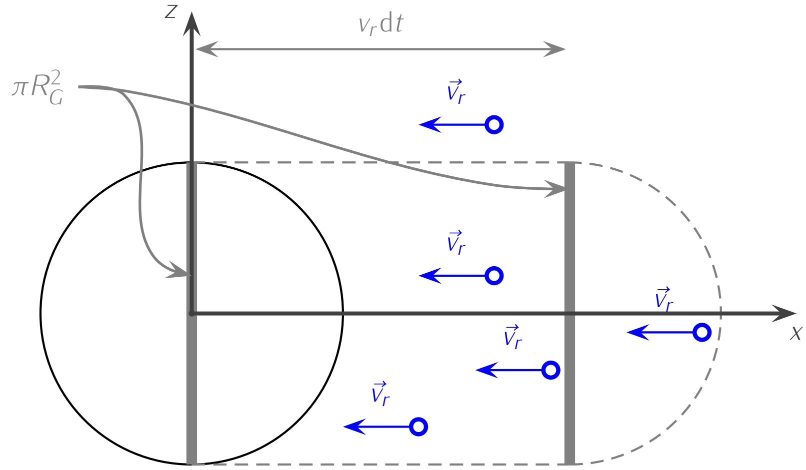
Q37 4. On pose $v_- = -\dot{z}$ si $\dot{z} < 0$, on peut alors écrire, dans le cas où $\dot{z} < 0$: $\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}z} = v_-\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}z}$, la seconde loi de Newton se réécrit alors : $\boxed{v_-\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}z} = -\omega^2 z + \frac{\beta}{m}v_-^2}$

On pose $\mu = \frac{\beta}{m}$. Dimensionnellement, $\left[v_-\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\mu v_-^2\right]$, donc $\boxed{\left[\frac{1}{\mu}\right] = L}$

3. Engelhardt, T., Jedicke, R., Vere, P., et al. 2017, AJ, 153,133

5. Posons, pour alléger les calculs $f = v_-^2$, alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = 2v_-\frac{\mathrm{d}v_-}{\mathrm{d}z}$ et l'équation à résoudre peut se réécrire sous la forme :
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - 2\mu f = -\omega^2 z$$
On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants avec un second membre polynomial. L'ensemble des solutions est donné par la somme des solutions, f_h de l'équation homogène associée et d'une solution particulière f_p.
On a : $f_h(z) = A\exp(2\mu z)$. On peut chercher f_p de la même forme que le second membre : $f_p(z) = Bz + C$, en injectant cet ansatz dans l'équation différentielle on obtient :
Q38 $B - 2\mu(Bz + C) = -2\omega^2 z$
Par identification, on trouve $B = \frac{\omega^2}{\mu}$ et $C = \frac{\omega^2}{2\mu^2}$, l'ensemble des solutions s'écrit bien : $\boxed{f = v_-^2 = A\exp(2\mu z) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}}$
avec $A \in \mathbf{R}$.
6. On a la condition initiale $v_-(z = z_0) = 0$, on peut alors déterminer la constante d'intégration $A =$
Q39 $-\left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}\right)\exp(-2\mu z_0)$. Ainsi on obtient enfin :
$\boxed{v_-^2 = \left(\frac{\omega^2 z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}\right)\exp(2\mu(z - z_0)) + \frac{\omega^2 z}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2} = 0}$
Q40 7. La vitesse s'annule à l'altitude z_1 telle que $v_-(z_1) = 0$, on a alors :
$\boxed{\left(\frac{\omega z_0}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}\right)\exp(2\mu(z_1 - z_0)) + \frac{\omega^2 z_1}{\mu} + \frac{\omega^2}{2\mu^2}}$
8. L'équation précédente montre l'existence de deux régimes, suivant la position initiale de la particule. Lorsque la hauteur initiale est bien plus grande que l'altitude caractéristique $\frac{1}{\mu}$, l'argument de l'exponentielle est très
Q41 inférieur à -1 et on peut négliger ce terme. Dans ce cas, on trouve $\boxed{z_1 = -\frac{1}{2\mu}}$, il est assez remarquable que la position du point de rebroussement soit indépendante de l'altitude initiale. Ceci correspond à un $\boxed{\text{arrêt rapide}}$ du mouvement, la particule part de z_0 et fait demi-tour à z_1 telle que $-z_1 \ll z_0$.
9. Dans le cas où $z \gg \frac{1}{\mu}$ on obtient le terme $\frac{\omega^2 z}{\mu}$ est bien plus grand que les autres dans l'expression de la
Q42 formule de la question 6. et donc $v_-^2 = \frac{\omega^2 z}{\mu}$, d'où $\boxed{\dot{z} = -\omega\sqrt{\frac{z}{\mu}}}$
10. L'équation différentielle obtenue à la question précédente peut être résolue à l'aide de la méthode de
Q43 séparation des variables :
$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = -\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}t$
Soit : $2(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}) = -\frac{\omega}{\sqrt{mu}}t$, finalement on arrive enfin à l'expression de l'altitude au cours du temps
$\boxed{z = z_0\left(1 - \frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}}t\right)^2}$
Q44 11. La particule fait son premier demi-tour lorsque sa vitesse est nulle. On dérive l'expression de la question précédente : $\dot{z} = 2z_0\left(-\frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}}\right)\left(1 - \frac{\omega}{2\sqrt{\mu z_0}}t\right)$. On a bien une vitesse négative. Pour trouver t_1, on résout $\dot{z}(t_1) = 0$, soit : $\boxed{t_1 = 2\frac{\sqrt{\mu z_0}}{\omega}}$
Q45 12. On trouve $z(t_1) = 0$ et $\dot{z}(t = 0) \neq 0$, ce qui n'est ni compatible avec l'approximation faite, ni avec les conditions initiales. L'approximation faite est donc trop violente et ne peut pas être considérée comme valide tout au long du mouvement (peut-être suffisamment loin de $t = 0$ et $t = t_1$ seulement).
Q46 13. Dans le cas où z_0 est bien plus faible que $\frac{1}{\mu}$ alors, à l'aide de l'expression trouvée à la question 7) on trouve une altitude de rebroussement égale à $-z_0$, ceci correspond à une phase oscillatoire : la particule décrit des oscillations de part et d'autre du plan médian avec une amplitude lentement décroissante.

6 Modèle d'accrétion simple



1.

Q47 Les particules (dont on néglige la taille, cad on les suppose ponctuelles) entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ sont en face de la graine (au sens de $\vec{v}_r$ va les amener sur la graine) et à une distance inférieure à $v_r \times \mathrm{d}t$ car sinon elles n'ont pas le temps d'atteindre la graine. Cela forme un demi-cylindre privée d'une demi sphère à gauche et auquel on ajoute une demi-sphère à droite. Ces deux volumes se compensent et le volume (pour la question suivant) considérée est donc le même que celui d'un $\boxed{\text{cylindre de hauteur } v_r dt \text{ et de base } \pi R_G^2}$

Q48 2. L'énoncé fourni la densité particulaire $n^\star$, le volume occupée par les particules entrant en collision avec la graine étant $\mathrm{d}V = \pi R_G^2 v_r \mathrm{d}t$, leur nombre est $\boxed{\mathrm{d}N_{coll} = \pi n^\star R_G^2 v_r \mathrm{d}t}$. En effet, $\boxed{\text{toutes}}$ les particules qui sont dans le volume vont avoir une collision puisqu'elles ont toutes la même vitesse vers la graine. C'est un point différent du cas traité en cours.

3. Chaque particule possède une masse m, ainsi entre t et $t + \mathrm{d}t$ la masse de graine augmente de $\mathrm{d}M = m\mathrm{d}N_{coll} = \pi n^\star R_G^2 v_r m\mathrm{d}t$.

Q49 La graine étant sphérique, sa masse est liée à son rayon par la relation $M = \frac{4}{3}\pi R_G^3 \rho_G$.
En différentiant terme à terme on obtient : $\mathrm{d}M = 4\pi\rho_G R_G^2 \mathrm{d}R_G = \pi n^\star R_G^2 v_r m\mathrm{d}t$. (Remarque : on peut également retrouver ce résultat en disant que la masse ajoutée à la graine se répartie sur la surface $4\pi R_G^2$ et sur une épaisseur $\mathrm{d}R_G$).
On peut aussi raisonner de la façon suivante : la masse après est égale à la masse avant + la masse gagnée par les collisions : $M(t + \mathrm{d}t) = M(t) + m\mathrm{d}N_{coll}$ soit $\frac{M(t+\mathrm{d}t)-M(t)}{\mathrm{d}t} = m\pi n^\star R_G^2 v_r$. Or $M(t) = \frac{4}{3}\pi R_G(t)^3 \times \rho_G$, d'où $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 4\pi R_G(t)^2 \times \frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t} \times \rho_G$ et donc en égalisant avec l'expression précédente :

$$4\pi R_G(t)^2 \times \frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t} \times \rho_G = m\pi n^\star R_G^2 v_r$$

Quelque soit la méthode, la vitesse d'accrétion est donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t} = \frac{v_r n^\star m}{4\rho_G}}$

On remarque que la vitesse d'accrétion est constante et en prenant $R_G(t = 0)$ on trouve :
$\boxed{R_G(t) = \frac{v_r n^\star m}{4\rho_G} t}$

Q50 4. Le temps nécessaire pour que la graine atteigne une taille égale à la moitié de celle de la Terre est donné par $R_g(t_{1/2}) = \frac{1}{2}R_T$, soit $\boxed{t_{1/2} = \frac{2R_T\rho_G}{v_r\rho_D} \simeq 4.10^5 \text{ années}}$. Remarque, il faut justifier que $n^* m = \rho_D$. Cela est assez facile : considérons un volume V quelconque, contenant N particules, alors par définition de n^*, $N = n^* \times V$. La masse totale est $N \times m$ et donc la densité est $\rho_D = \frac{N \times m}{V} = n^* \times m$.

Q51 5. Ce résultat est un ordre de grandeur plus faible que les résultats d'observations. Ce modèle n'est donc pas valide. On peut citer deux raisons possibles :
— On peut déjà évoquer le sillon qui se forme au cours de la formation d'une planète (voir la photographie de l'énoncé). Au fur à mesure la protoplanète « nettoie » sa trajectoire et la densité particulaire diminue, et donc l'accrétion est plus lente.

— On peut également remettre en cause la valeur de la masse volumique de la planète. En effet, proche du centre, les forces de pression font que la masse volumique est bien plus élevée que celle fournie.

7 Modèle d'accrétion galopante

1. On peut représenter la situation de la façon suivante : l'origine du repère est centré sur la graine, on
Q52 oriente l'axe (Ox) tel que $\vec{v}_r$ soit dans le plan (Oxz) et tel que (Ox) soit colinéaire à $\vec{v}_r$. On peut alors calculer le moment cinétique de la particule lorsque celle-ci est à l'infini avec la méthode du bras de levier : $\vec{L} = mbv_r\vec{u}_z$, on remarque que la grandeur b introduite dans l'énoncé correspond au $\boxed{\text{bras de levier}}$. Cette distance porte un nom, on l'appelle le paramètre d'impact (vu en TD).

   Ne faites pas un cas particulier sur votre schéma où $\vec{v}_r$ irait vers O, c'est très improbable.

Q53 2. Cf cours Beaucoup ont voulu appliquer un TMC scalaire. Cela n'est pas cohérent avec ce que l'on veut montrer car c'est conservation de la $\boxed{\text{direction}}$ du vecteur moment cinétique qui permet de montrer que le mouvement est plan ! Il est donc ici <u>nécessaire</u> d'appliquer un TMC vectoriel.

Q54 3. L'énergie mécanique vaut $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}}$

   Comme la particule provient de l'infini $E_m > 0$ et la trajectoire qu'elle décrit est une $\boxed{\text{hyperbole}}$.

Q55 4. Par conservation du moment cinétique on obtient : $r^2\dot{\theta} = L/m = Cste$

   Ainsi $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mb^2v_r^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}}$

Q56 5. À la distance minimale d'approche $\dot{r}(t_{min}) = 0$ et alors :

$$\frac{1}{2}v_r^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2v_r^2}{r_{min}^2} - \mathcal{G}\frac{M}{r_{min}} \ .$$

   Attention si vous laissez E_m dans cette formule, ce n'est pas une donnée de l'énoncé.

Q57 6. $\boxed{v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R_G}}}$, cf cours.

   Attention, beaucoup d'entre vous avait un "r" dans le résultat, mais ce n'est pas n'importe quel "r", c'est le rayon de l'astre qui intervient car le raisonnement est une conservation de l'énergie mécanique entre un point de départ <u>à la surface de l'astre</u> et un point "à l'infini" (ou raisonnement sur E_m et $E_{p,eff}$ pour avoir un état de diffusion limite, mais le point de départ est toujours à la surface de l'astre).

Q58 7. La distance minimale d'approche vérifie $r_{min}^2 = \frac{2\mathcal{G}M}{v_r^2}r_{min} - b^2 = 0$ que l'on peut réécrire $\boxed{r_{min}^2 + \frac{v_l^2}{v_r^2}r_{min} - b^2 = 0}$

8. Ainsi r_{min} est solution d'une équation du second degré qui La seule solution possible (positive) est $r_{min} =$
Q59 $\frac{1}{2}\left(-R_G\frac{v_l^2}{v_r^2} + \sqrt{\left(R_G\frac{v_l^2}{v_r^2}\right)^2 + 4b^2}\right)$ La particule heurte la planète si $r_{min} \leq R_G$ on obtient alors la condition :

$\sqrt{\left(R_G\frac{v_l^2}{v_r^2}\right)^2+4b^2} \leq R_G + R_G\frac{v_l^2}{v_r^2}$, soit en élevant au carré en simplifiant on retrouve bien l'expression de l'énoncé $\boxed{b^2 \leq R_G^2\left(1+\frac{v_l^2}{v_r^2}\right)}$

Q60 9. Cette fois-ci les particules entrant en collision avec la graine entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ étaient <u>initialement</u> dans un cylindre de base πb^2 , leur nombre est donc

$\boxed{\mathrm{d}N_{coll} = \pi b^2 v_r n^\star \mathrm{d}t = \pi v_r n^\star (1+\frac{v_l^2}{v_r^2})\mathrm{d}t}$

(en fait le volume n'est pas tout à fait cylindrique pour des raisons similaire à la question 1 de la partie 2, mais le volume est identique à celui du cylindre)

Q61 10. La vitesse d'accrétion est donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t} = \frac{v_r n^\star m}{4\rho_G}\left(1+\frac{2\mathcal{G}M}{R_G v_r^2}\right)}$. On constate l'apparition d'un terme supplémentaire par rapport au modèle simple qui provient de l'attraction gravitationnelle.

Q62 11. On peut résoudre cette équation différentielle non linéaire par la méthode de séparation des variables. En effet, en remarquant que M est lié à R_G par $M = \frac{4\pi}{3}\rho_G R_G^3$, on obtient : $\frac{\mathrm{d}R_G}{1+\left(\frac{R_G}{R_0}\right)} = v_G \mathrm{d}t$

Avec $v_G = \frac{v_r n^\star m}{4\rho_G}$ et $R_0 = \sqrt{\frac{3v_r^2}{8\pi\mathcal{G}\rho_G}}$ En intégrant entre $R_G = 0$ et $R_G = R_G(t)$, on obtient : $\arctan\left(\frac{R_G}{R_0}\right) = \frac{v_G t}{R_0}$

Et finalement : $\boxed{R_G(t) = R_0 \tan\left(\frac{v_G t}{R_0}\right)}$

12. On remarque que cette fois-ci l'évolution du rayon n'est plus linéaire mais diverge lorsque $\frac{v_G t}{R_0} = \frac{\pi}{2}$. Ceci est dû à l'interaction gravitationnelle. Plus la graine est massive et plus elle attire les particules les elles.
Q63 Il y a un effet de focalisation gravitationnelle. En effet, on constate que plus M est grand et plus $\frac{\mathrm{d}R_G}{\mathrm{d}t}$ l'est aussi. On observe un effet boule de neige d'où l'expression « galopante ». Le temps typique de formation de la planète est certainement de l'ordre de $T = \frac{\pi R_0}{2v_G} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6\rho_G}{\mathcal{G}\rho_D}} =\simeq 7.10^5$ années. On trouve là aussi un temps de formation typique bien trop faible.

8 Une aide venue d'ailleurs

Q64 1. Pour former une étoile de $0{,}5M_\odot$ il faut un nuage de gaz de masse comprise entre 1,7 et 5 $M_\odot$, donc pour un amas de 5000 étoiles, il faut une masse de gaz comprise entre $\boxed{8300 \text{ et } 25000\ M_\odot}$.

2. La loi d'échelle fournie dans l'énoncé donne $M_{neb} = 10^{3,42}R_{neb}^{1,67}$ On a alors $R_{neb} = \left(\frac{M_{neb}}{3{,}42}\right)^{1/1,67}$ on trouve
Q65 alors une taille de nébuleuse comprise entre 2 et 3,9 pc et donc un volume V entre 33 et $2{,}4\times10^2$ pc^3. Le volume accessible a chaque étoile est donc $v = \frac{4\pi R_{neb}^3}{3\times5000}$, soit un volume compris entre $\boxed{6{,}6\times10^{-4} \text{ et } 0{,}048 \text{ pc}^3}$.

Q66 3. L'énoncé donne la densité particulaire, on en déduit que le nombre d'objets interstellaires est : $N = n_{iso}^\star v$ soit un nombre compris entre $\boxed{6{,}6\times10^{12} \text{ et } 4{,}8\times10^{13}}$. (Les 2 chiffres significatifs sont "de trop" vu l'incertitude).