

## ÉTUDE DU LARGE HADRON COLLIDER DU CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider : LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

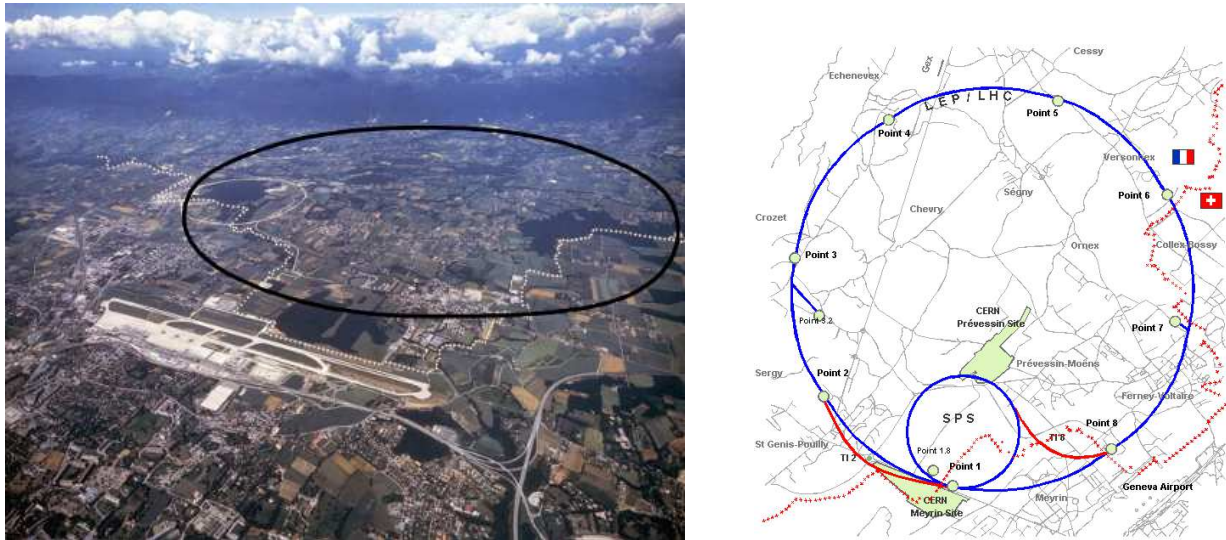


FIGURE 1 – Photographie aérienne et carte du LHC.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire ou encore de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants. L'énergie des protons est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention.

Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard. On se propose dans ce problème de comprendre quelques aspects du fonctionnement du LHC.

Constantes physiques :

Masse du proton	$m_p = 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

## 1 Brève histoire d'un proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider.

Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes.

Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

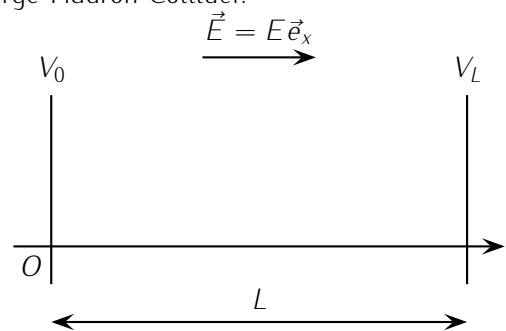


FIGURE 2 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

### 1.1 Particule dans un champ électrique constant et uniforme

On étudie une accélération simple entre deux électrodes comme représenté sur la figure 2.

- Q1 1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  ?
- Q2 2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ  $E = 100 \text{ kV/m}$ . On prendra  $g = 10 \text{ N/kg}$ .
- Q3 3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ .  
La zone de l'espace où règne le champ  $\vec{E}$  a une longueur  $L$ . On considère que le potentiel  $V_0$  du plan  $x = 0$  est nul, on note  $V_L$  le potentiel du plan  $x = L$ .
- Q4 4. Rappeler le lien entre le potentiel électrique et l'énergie potentielle ou la définition générale du potentiel électrique. En déduire le lien entre  $V_L$ ,  $E$  et les données du problème. On sera attentif aux signes.

- Q5 5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer, par la méthode de votre choix, la vitesse en sortie de la zone d'accélération, en fonction de  $V_L$ , puis de  $E$ .

## 1.2 Particule dans un champ électrique constant et uniforme

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale  $U_c$  toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice  $U_0$ .

Source de protons  
pré-accelerés par  
une tension  $U_0$

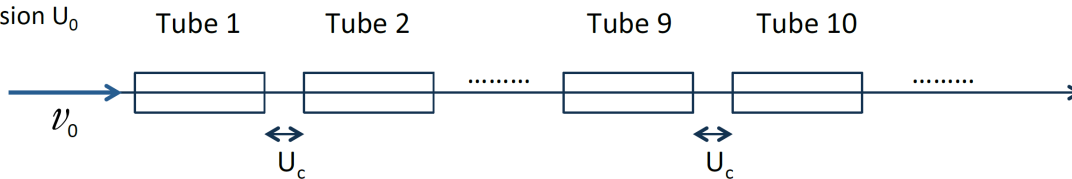


FIGURE 3 – Le linac 2

- Q6 1. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins?
- Q7 2. Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du  $n$ -ième tube en fonction de  $U_c$  et  $U_0$ .
- Q8 3. Calculer numériquement la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10<sup>e</sup> tube pour  $U_0 = 200$  kV,  $U_c = 2000$  kV.

## 1.3 Détails d'un accélérateur linéaire (questions un peu plus délicates)

Un moyen d'arriver à avoir une accélération avec une tension élevée à l'aide de plusieurs tubes est d'utiliser un accélérateur de Wilderöe. Les protons produits au niveau de la source (avec une vitesse quasi-nulle), traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur représenté sur la figure 4.

La tension délivrée par le générateur est :  $V(t) = -V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$  avec  $V_{\max}$  positif et  $0 < \phi < 2\pi$ . On note  $T$  la période du signal. Les tubes sont distants de  $d'$ . À l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs. On supposera que  $d'$  est suffisamment faible, pour que l'on puisse considérer que le proton voit un champ électrique indépendant du temps, entre deux tubes consécutifs.

Le point  $B_0$  est placé à la sortie de la source, les différents points  $B_i$  sont placés à la sortie des tubes  $i$  pour  $i \in \{1..5\}$ . On note  $L_i$  la longueur du tube  $i$ . De même, on note  $v_i$  la vitesse au point  $B_i$  pour  $i \in \{1..5\}$ .

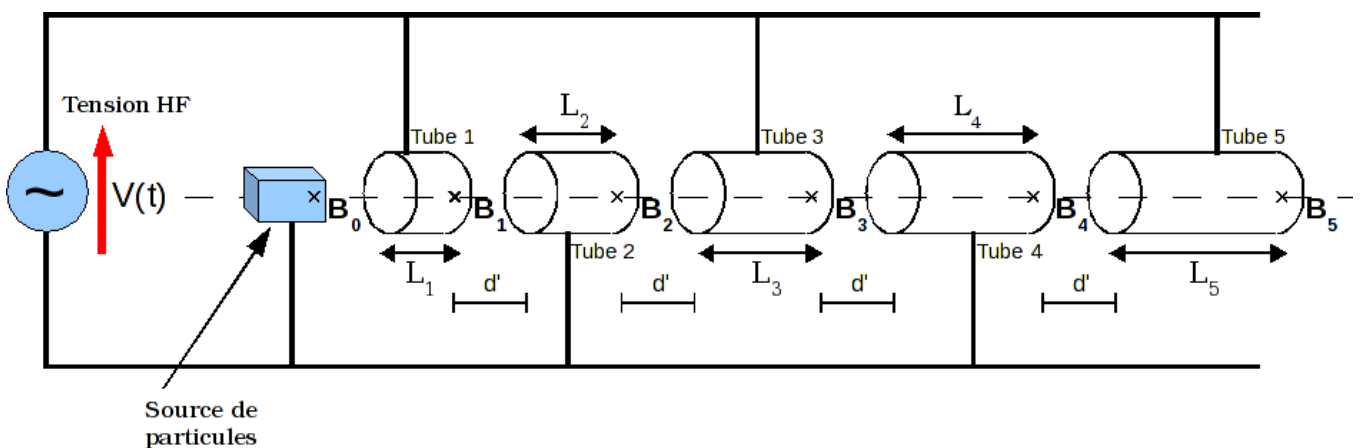


FIGURE 4 – Accélérateur de WILDERÖE

- Q9 1. Représenter sur votre copie les vecteurs champs électriques, à la date  $t = 0$ , aux points  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  et  $B_5$ . Pour le dessin, on prendra  $0 < \phi < \pi$ .
- Q10 2. Même question à la date  $t = \frac{T}{2}$ .
- Q11 3. De façon qualitative, à quelle condition les protons sont-ils toujours accélérés ?
- Q12 4. Si la condition précédente est respectée, représenter en fonction du temps l'allure de la vitesse des protons entre les points  $B_0$  et  $B_5$ .
- Q13 5. Exprimer  $L_i$  la longueur du tube permettant une accélération optimale en fonction de  $v_i$  et de  $T$ . Les tubes ont-ils tous la même longueur, pour une accélération optimale ?
- Q14 6. Pour une vitesse proche de  $c$ , et une fréquence du GBF égale à 10 MHz, calculer la longueur d'un tube.

#### 1.4 Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en  $A$  dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

À  $t = 0$  sa vitesse  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 5.

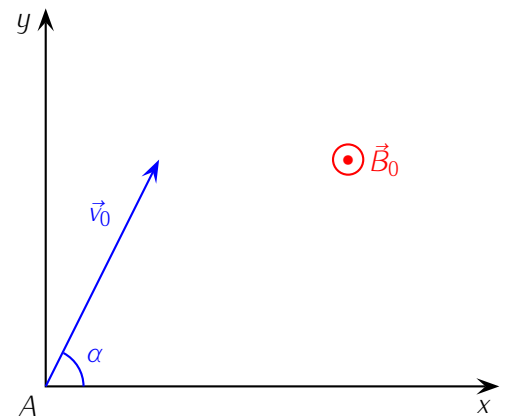


FIGURE 5 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

- Q15 1. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique  $\vec{B}_0$ . Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.
- Q16 2. Reproduire la figure 5 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en  $A$ . Exprimer la norme de cette force.
- Q17 3. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.
- Q18 4. Par projection du principe fondamental de la dynamique, établir trois équations différentielles en  $v_x, v_y, v_z$  et leurs dérivées temporelles. On ne cherchera pas à les résoudre. À partir de là, **on admet que la trajectoire du proton est un cercle.**
- Q19 5. Sur le schéma de la question 2, dessiner l'allure de la trajectoire. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de  $m_p, B_0, e, v_0$ .

#### 1.5 Rayonnement synchrotron dans le LHC

Lorsqu'une particule est accélérée, elle émet un rayonnement électromagnétique que l'on nomme rayonnement synchrotron. La puissance rayonnée dépend de la charge  $q$  de la particule, du rayon de courbure  $r$  de la trajectoire et des constantes  $c$  et  $\epsilon_0$ . On supposera que la puissance rayonnée par une particule en mouvement circulaire est de la forme :

$$P = K q^2 c \epsilon_0^{-1} r^\alpha \quad K \text{ étant une constante sans dimension.}$$

- Q20 1. Par analyse dimensionnelle en utilisant une formule de votre choix, déterminer la dimension de la grandeur  $\frac{q^2}{\epsilon_0}$ .
- Q21 2. Par analyse dimensionnelle, déterminer alors  $\alpha$ .

## 2 Cavités résonnantes

Pour atteindre des énergies supérieures, en gardant une longueur de tubes raisonnable, il faut augmenter la fréquence du générateur. À haute fréquence, les tubes se comportent comme des antennes dipolaires et rayonnent énormément d'énergie. La solution, pour éviter ces pertes, consiste à enfermer les tubes dans une cavité résonnante dont les parois réfléchissent le rayonnement. Les cavités, pour les ondes radio-fréquences (RF), peuvent être modélisées par un circuit électrique simple. L'excitation est modélisée par un générateur idéal de tension. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$  et on adopte la notation complexe :

$$u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t)$$

avec  $j^2 = -1$  et  $\text{Re}(\underline{u}(t))$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $\underline{u}(t)$

### 2.1 Modèle électrique d'une cavité parfaite

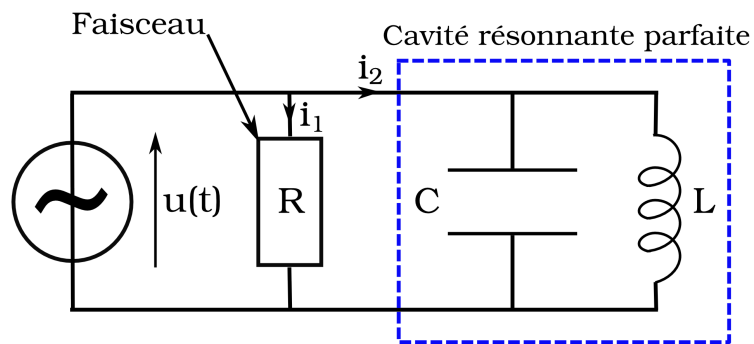


FIGURE 6 – Modélisation électrique d'un faisceau dans une cavité parfaite

Une cavité parfaite peut être modélisée par un condensateur de capacité  $C$  mis en parallèle avec une bobine d'inductance  $L$ . Le faisceau est modélisé par une résistance de charge  $R$  (figure 6).

- Q22 1. Donner l'impédance complexe équivalente de la cavité résonnante parfaite.
- Q23 2. Donner les expressions réelles du courant  $i_1(t)$  traversant la résistance  $R$  et  $i_2(t)$  traversant la cavité, en fonction de  $U_m, R, L, C, \omega$  et  $t$ .
- Q24 3. Pour quelle valeur particulière  $\omega_0$  de  $\omega$ , l'intensité  $i_2(t)$  est-elle nulle ?

### 2.2 Modèle électrique d'une cavité réelle

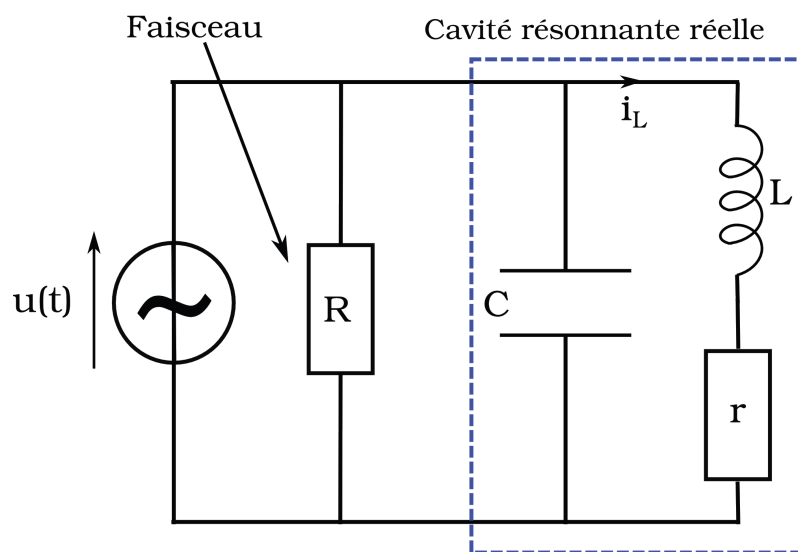


FIGURE 7 – Modélisation électrique d'un faisceau dans une cavité réelle

Dans une cavité réelle, les courants surfaciques sur les bords de la cavité induisent des pertes. On modélise ces pertes par une résistance  $r$  placée en série avec la bobine.

Dans la suite, on note  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0$  a été définie à la question précédente.

- Q25
1. Calculer l'impédance complexe équivalente  $\underline{Z}$  de la cavité résonnante réelle.
  2. Montrer que le module au carré de cette impédance peut s'écrire sous la forme :

$$|\underline{Z}|^2 = r^2 \frac{1 + Q^2 x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

- Q26
- On exprimera  $Q$  en fonction de  $L$ ,  $\omega_0$  et  $r$ .
- Q27
3. Soit  $i_L(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$  le courant circulant dans la branche contenant la bobine et la résistance  $r$ . Exprimer  $I_0$ ,  $\tan \alpha$  et  $\sin \alpha$  en fonction de  $L$ ,  $U_m$ ,  $\omega$  et  $r$ .
- Q28
4. Dans la suite de l'énoncé, on se place dans une situation où  $L\omega \gg r$ . Que vaut alors  $\alpha$ ? Que peut-on alors dire du courant circulant dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur?
- Q29
5. On suppose que  $\omega = \omega_0$ . En déduire une expression de l'énergie  $U$  totale stockée dans la cavité résonnante en fonction de  $L$  et  $I_0$ .

## ÉTUDE DU LARGE HADRON COLLIDER DU CERN

CAPES 2011 et ATS 2015

### 3 Brève histoire d'un proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

#### 3.1 Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Q30
1. Il s'agit de la partie électrique de la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{E}$ .
- Q31
2. En ordre de grandeur  $qE = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^5 = 1,6 \times 10^{-14}$  N. Le poids  $P = mg = 1,67 \times 10^{-27} \times 10 \simeq 10^{-26}$  N. Soit  $10^{12}$  fois plus faible. Le poids est donc négligeable compte tenu de la précision des données de l'énoncé.

**Donner la valeur du rapport pour montrer que l'un est négligeable par rapport à l'autre. On néglige toujours dans des sommes/différences et jamais dans des produits/rapports.**

Remarque : ayez conscience que ces histoires de "négligeables" sont toujours fonctions de la précision souhaitée ou de la précision sur les données. Ainsi, si  $A \simeq B/1000$ , alors  $A + B \simeq B$  si on travaille avec 2 chiffres significatifs, mais pas du tout si on travaille avec 5 chiffres significatifs.

- Q32
3. Le système est le proton, le référentiel est le référentiel terrestre, galiléen  $m\vec{a} = q\vec{E}$   
d'où  $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ .
- Q33
4. Le potentiel électrique est tel que la variation du potentiel électrique entre deux points est égale à l'opposé de la circulation du champ électrique :  $-\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(B) - V(A)$ .
- On applique la définition entre un point en  $x = 0$  et un deuxième en  $x = L$ .

$$-\int_{x=0}^L E \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = V_L - V_0 \Rightarrow V_L = -EL$$

- Q34
5. Le plus simple est d'utiliser une méthode énergétique. Le référentiel est galiléen et on considère un système ponctuel, on en déduit par application du théorème de l'énergie mécanique  $E_m(x=L) - E_m(x=0) = W_{nc} = 0$  puisque seul la force de Lorentz est appliquée au système. L'énergie potentielle est  $E_p = qV$ .

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_L - 0 - qV_0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-2eV_L}{m}} = \sqrt{\frac{2eEL}{m}}$$

### 3.2 Particule dans un champ électrique constant et uniforme

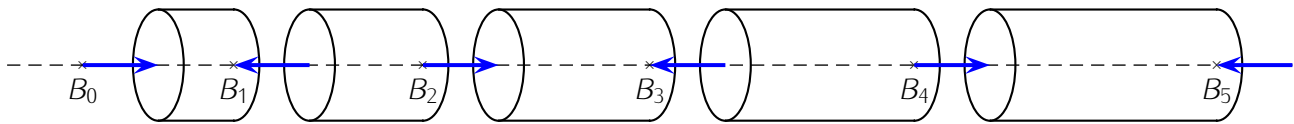
1. En reprenant le résultat de la question précédente et en l'appliquant entre deux tubes successifs,  $E_{C,i+1} + eV_{i+1} - E_{C,i} - eV_i = 0 \Rightarrow E_{C,i+1} - E_{C,i} = e(V_i - V_{i+1}) = \boxed{qU_c}$ .

2. À la sortie du  $n^{\text{e}}$  tube, la particule a été accélérée par  $U_0$  puis  $n - 1$  fois par  $U_c$ . L'énergie cinétique est donc  $\boxed{E_{C,n} = e(U_0 + (n - 1)U_c)}$ .

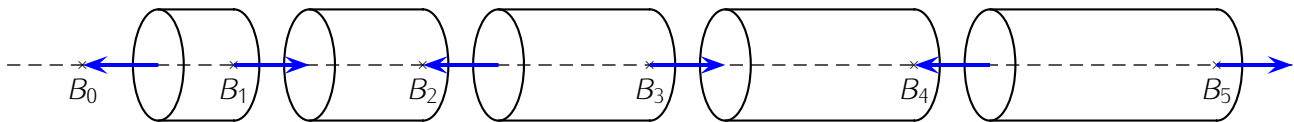
3.  $E_{C,10} = eU_0 + 9eU_c = 1,6 \times 10^{19} (2 \times 10^5 + 9 \times 2 \times 10^6) = 1,6 \times 10^{-19} \times 182 \times 10^5 \simeq \boxed{2,8 \times 10^{-12} \text{ J} = 18,2 \text{ MeV}}$

$v = \sqrt{2E_c/m} = \sqrt{2 \times 2,8 \times 10^{-12} / (1,67 \times 10^{-27})} = \sqrt{3,6 \times 10^{15}} = \sqrt{0,36 \times 10^{16}} \simeq 0,6 \times 10^8 \text{ m/s}$ .  
Ces électrons vont moins vite que  $c/3 = 10^8 \text{ m/s}$ , ils n'est donc pas nécessaire de les considérer comme relativistes.

1. À  $t = 0$  et pour  $0 < \phi < \pi$ , la tension est négative :  $V(t) < 0$ . Le champ électrique est de sens "opposé" à la tension de façon à ce que les charges positives "descendent" les potentiels. Ainsi le champ électrique au niveau de  $B_0$  est orienté de  $B_0$  vers  $B_1$ , et en  $B_1$  c'est l'inverse (et ainsi de suite pour les points suivants).



2. À  $t = T/2$ , le signe des sinus a changé (mais la norme reste la même) . Il suffit donc d'inverser toutes les flèches.



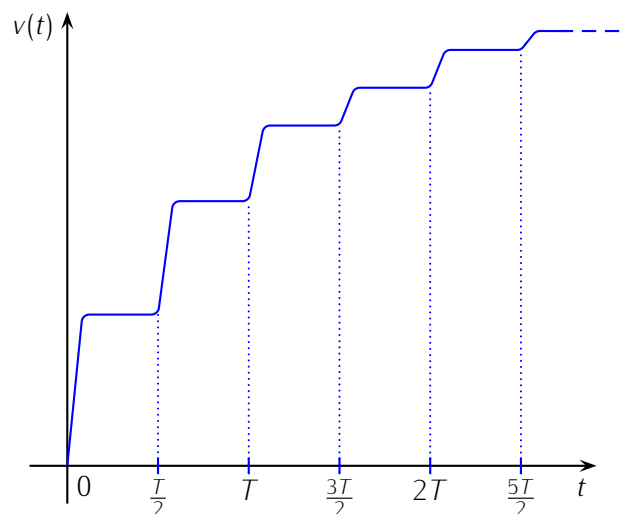
3. (a) Il faut que lorsque l'on parcourt un tube la tension change de sens pour accélérer la particule à nouveau au maximum. Soit il faut que le temps de parcours d'un tube soit un nombre demi-entier fois la période du signal  $t_i = (n + \frac{1}{2}) T$ . (Le plus naturel étant  $t_i = T/2$  pour avoir un dispositif de dimension le plus faible possible).

(b) Il y a une augmentation brusque de la vitesse à chaque passage entre deux tubes.

Chaque augmentation correspond au passage au niveau d'un point  $B_i$  :  $B_0$  en  $t = 0$ ,  $B_1$  en  $t = T/2$  etc...

Les points importants à bien représenter sont les suivants :

- l'augmentation de la vitesse se fait pendant un temps **très bref**,
- les passages se font à **intervalles de temps constant** :  $T/2$  ;
- l'augmentation de l'énergie cinétique est la même à chaque tube, l'augmentation de vitesse est donc elle **de plus en plus faible**. (La vitesse croît comme  $\sqrt{i}$ , voir remarque ci-dessous).
- Entre temps, le proton n'est soumis à aucune force et son mouvement se fait donc à vitesse **constante**.



(c) Il faut que la longueur des tubes soient adaptés à la vitesse des particules de façon à ce que le temps de parcours d'un tube soit toujours  $T/2$ . Ainsi,  $L_i = v_i \frac{T}{2}$ .

(On aurait pu mettre un demi-entier fois  $T$ , mais je ne pense pas que l'énoncé l'attendait).

Remarque : on pourrait tout à fait déterminer la longueur optimale pour chaque tube :  $E_{c,i} = i \times e \times U_c$  si la phase  $\phi$  est telle que l'accélération est optimale. d'où  $v_i = \sqrt{\frac{2 \times i \times e \times U_c}{m}}$ . On en déduit :  $L_i =$

$$\frac{T}{2} \sqrt{\frac{2 \times i \times e \times U_c}{m}} = \boxed{T \sqrt{\frac{i \times e \times U_c}{2m}}}$$

- Q43 (d)  $L_i \simeq cT/2 = c/(2f) = 3 \times 10^8 / (2 \times 10^7) = \boxed{15 \text{ m}}$ . On voit donc que la dimension du système peut devenir assez grande avec ce type d'accélérateur (puisqu'il faut plusieurs tubes).

Remarque : il était demandé dans l'énoncé original pourquoi un tel accélérateur provoque un regroupement des particules par paquet : les particules ne sont accélérées de façons optimales que si elles arrivent au bon instant (proche du maximum du cosinus), le reste du temps, les particules n'ont pas la bonne vitesse pour avoir un temps de passage de  $T/2$  et ne ressortent pas car elles sont parfois accélérées parfois freinées. On a donc un regroupement en paquets avec une période égale à la période du signal du GBF.

### 3.3 Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

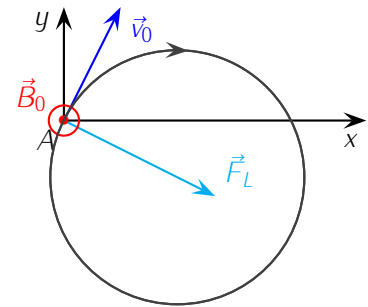
- Q44 1. La force est la partie magnétique de la force de Lorentz.  $\boxed{\vec{F}_L = e\vec{v}(t) \wedge \vec{B}_0}$ .  
Attention à ne pas mettre  $\vec{v}_0$ , mais bien  $\vec{v}(t)$  : lorsque la vitesse change, alors la force change elle aussi !  
2. La force est orthogonale à  $\vec{v}$  et  $\vec{B}_0$ .

Puisque  $e > 0$ , la force est dans le sens du produit vectoriel (règle de la main droite).

La norme de la force en A est  $F_L = ev_0 B_0 \sin(\pi/2) =$

$$\boxed{ev_0 B_0}$$

Le cercle correspond à la question 5 et représente la trajectoire. Elle doit être tangente à la vitesse en A, orientée dans le même sens et  $\vec{F}_L$  doit pointer vers « l'intérieur de la courbure ».



- Q45 Le cercle correspond à la question 5 et représente la trajectoire. Elle doit être tangente à la vitesse en A, orientée dans le même sens et  $\vec{F}_L$  doit pointer vers « l'intérieur de la courbure ».
- Q46 3. Par définition,  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ . Or  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , donc par définition du produit vectoriel,  $\vec{F} \perp \vec{B}$  et  $\vec{F} \perp \vec{v}$ . La dernière relation implique que  $\vec{F} \cdot \vec{v} = \boxed{0}$ . La puissance est nulle, donc le travail l'est aussi. Puisque l'on est dans un référentiel galiléen et que l'on étudie un point matériel, on peut utiliser le théorème de la puissance cinétique. On en déduit que  $\frac{dE_c}{dt} = 0$ , d'où  $E_c = cte \Rightarrow \boxed{v = cte'}$ . Le mouvement du proton est donc uniforme.

- Q47 4. Il s'agit de projeter le PFD selon les 3 axes. Peu importe les conditions initiales pour cette question. Le système est un point matériel, le référentiel est galiléen, d'après le PFD  $m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow m(\dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z) = e(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \wedge B_0 \vec{e}_z = eB_0(-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x)$ .

Soit en projetant :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = eB_0 v_y \\ m\dot{v}_y = -eB_0 v_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

Attention à ne pas oublier les constantes ( $m, e, B_0$ ).

- Q48 5. On a montré que le mouvement était uniforme, l'énoncé nous indique qu'il est circulaire. On peut donc utiliser l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme :  $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire vers le centre de la trajectoire. En prenant la norme du PFD, on en déduit :  $m\vec{a} = |e|\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow m \frac{v^2}{R} = e\vec{v} B_0 \sin(\vec{v}, \vec{B}_0)$ . Le sinus de l'angle vaut 1 car le mouvement se fait dans le plan orthogonal à  $\vec{B}_0$ , on a donc à chaque instant  $\vec{v} \perp \vec{B}_0$ , de plus, d'après la question 3,  $v = cte = v_0$ , d'où  $m \frac{v_0^2}{R} = ev_0 B_0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv_0}{eB_0}}$ .

La trajectoire est représentée sur la figure de la question 2. Elle doit, passer par le point A, être un cercle,  $\vec{v}_0$  est tangent à la trajectoire,  $\vec{F}_L$  pointe vers l'intérieur de la trajectoire.



### 3.4 Rayonnement synchrotron dans le LHC

1. Le plus simple est sans doute l'expression de la force. L'énoncé suggérait initialement d'utiliser l'énergie stockée  $E = \frac{Q^2}{2C}$  dans un condensateur pour déterminer une puissance en fonction d'une charge, d'une capacité et d'une durée. Il faut ensuite relier une capacité à  $\epsilon_0$  en utilisant l'unité de  $\epsilon_0$ .

Q49 En norme :  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , soit dimensionnellement  $M.L.T^{-2} = \left[ \frac{q^2}{\epsilon_0} \right] \frac{1}{L^2} \Rightarrow \left[ \frac{q^2}{\epsilon_0} \right] = M.L^3.T^{-2}$ .

2. Il faut la dimension d'une puissance, elle peut se déterminer en se rappelant que  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$  soit  $[P] = M.L^2.T^{-3}$ .

Q50 L'énoncé donne la formule  $P = K_C \frac{q^2}{\epsilon_0} r^\alpha$ , soit en prenant les dimensions :

$$M.L^2.T^{-3} = 1 \times L.T^{-1} \times M.L^3.T^{-2} \times L^\alpha \Leftrightarrow L^2 = L^{4+\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

## 4 Cavité résonnantes

### 4.1 Modèle électrique d'une cavité parfaite

1. La cavité résonnante parfaite correspond à un condensateur et une bobine en parallèle, d'où son impédance

Q51  $Z_p$  vaut  $Z_p = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{Z_L}{1 + \frac{Z_L}{Z_C}} = \boxed{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}$ .

2. Le plus simple est  $i_1$  puisque l'on a simplement un résistor :  $u(t) = Ri_1(t)$  et il n'est pas nécessaire de passer en complexe. On en déduit  $\boxed{i_1(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t)}$ .

Pour  $i_2$ , il est nécessaire de passer en complexe, l'amplitude complexe vaut :

$$\underline{i_2} = \frac{U_m}{Z_p} = \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega} U_m$$

On détermine le module de  $\underline{i_2}$  :  $i_2 = \frac{|1 - LC\omega^2|}{L\omega} U_m$ . L'argument est plus délicat à cause du changement de signe du numérateur.  $\text{Arg}(\underline{i_2}) = \text{Arg}(1 - LC\omega^2) - \frac{\pi}{2}$ . Si  $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , alors le nombre est positif et donc son argument vaut 0, sinon il est négatif et son argument vaut  $\pi$ . Dans le cas où  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , le module est nul et il est inutile de considérer l'argument.

D'où

$$i_2(t) = \begin{cases} \frac{|1 - LC\omega^2|}{L\omega} U_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } \omega \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{|1 - LC\omega^2|}{L\omega} U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } \omega \geq \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

On peut simplifier les valeurs absolues et les  $\pi/2$

$$i_2(t) = \begin{cases} \frac{1 - LC\omega^2}{L\omega} U_m \sin(\omega t) & \text{si } \omega \leq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega} U_m (-\sin(\omega t)) & \text{si } \omega \geq \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

Q52 Ce qui donne finalement  $\boxed{i_2(t) = \frac{1 - LC\omega^2}{L\omega} U_m \sin(\omega t)}$  dans tous les cas.

Remarque : il était légèrement plus simple de prendre la partie réelle de  $\underline{i_2} \exp(j\omega t)$  ici pour obtenir directement le résultat sans séparer les deux cas plutôt que de prendre module et argument.

On pouvait aussi faire l'analyse directement en réel avec les relations constitutives en considérant la primitive la plus simple pour la bobine.

Q53 3. En utilisant la formule précédente, c'est en  $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$  que le courant  $i_2(t)$  est nul.

## 4.2 Modèle électrique d'une cavité réelle

- Q54 1. Calculer l'impédance complexe équivalente  $\underline{Z}$  de la cavité résonante réelle.

$$\underline{Z} = \frac{(\underline{Z}_L + r)\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + r} = \frac{(\underline{Z}_L + r)}{1 + \frac{\underline{Z}_L + r}{\underline{Z}_C}} = \frac{r + jL\omega}{1 + jrC\omega - LC\omega^2}$$

2. Montrer que le module au carré de cette impédance peut s'écrire sous la forme :

$$|\underline{Z}|^2 = \left| \frac{r + jL\omega}{1 + jrC\omega - LC\omega^2} \right|^2 = r^2 \left| \frac{1 + j\frac{L}{r}\omega}{1 + jrC\omega - LC\omega^2} \right|^2$$

On souhaite faire apparaître  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut donc remplacer  $\omega$  par  $x\omega_0 = \frac{x}{\sqrt{LC}}$

$$|\underline{Z}|^2 = r^2 \left| \frac{1 + j\frac{L}{r\sqrt{LC}}x}{1 + jrC\frac{x}{\sqrt{LC}} - x^2} \right|^2 = r^2 \left| \frac{1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}x}{1 + jr\sqrt{\frac{C}{L}}x - x^2} \right|^2$$

- Q55 On pose donc  $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{r}$ .

$$|\underline{Z}|^2 = r^2 \left| \frac{1 + jQx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \right|^2 = \boxed{r^2 \frac{1 + Q^2x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Attention, il n'est pas évident que  $Q$  "colle bien" à la fois au numérateur et au dénominateur, il faut donc le vérifier explicitement.

3. En complexe  $I_0 = \frac{U_m}{r + jL\omega}$  soit  $I_0 = \frac{U_m}{|r + jL\omega|}$  et  $\alpha = \text{Arg} \frac{U_m}{r + jL\omega} = -\text{Arg}(r + jL\omega)$ .

Q56 On en déduit :  $I_0 = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}; \tan \alpha = -\frac{L\omega}{r}; \sin \alpha = \frac{-L\omega}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$

- Q57 4.  $I_0 \simeq \frac{U_m}{jL\omega}$  soit  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . La tension aux bornes du condensateur et le courant dans la bobine sont alors en quadrature de phase ( $i$  en retard sur  $u$ ).

- Q58 5. En  $\omega = \omega_0$ , et puisque on a fait l'hypothèse  $L\omega \gg r$ , on utilise le fait que  $U_m = L\omega I_0$  et que les deux grandeurs sont en quadrature de phase, d'où si  $u(t)$  est un cosinus, alors  $i(t)$  est un sinus.

$$U = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}Cu_c^2(t) = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}C I_0^2 L^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega t) = \boxed{\frac{1}{2}LI_0^2}$$

Il est remarquable que cette grandeur ne dépende pas du temps.