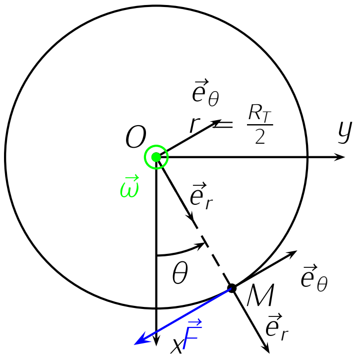
Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

TERRE ERRANTE

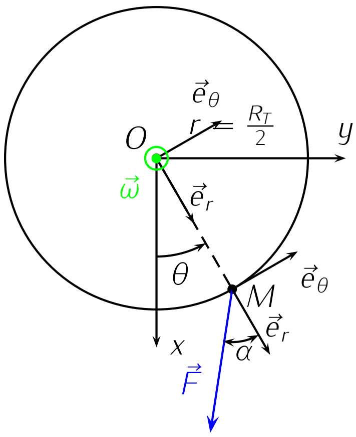
1 L'ère du freinage



1. Les propulseurs décrivent un cercle de rayon $r = R_T \cos(\lambda) = \frac{R_T}{\sqrt{2}}$.
2. Le bras de levier de la force d'un propulseur autour de l'axe des pôles est $\frac{R_T}{\sqrt{2}}$, donc le moment exercé par un propulseur est $-\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$ car $\vec{F}$ est orienté selon $-\vec{e}_\theta$. Comme il y a N propulseurs alors
$$\gamma = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$$
3. La Terre est uniquement soumise à l'action des propulseurs, le théorème scalaire du moment cinétique donne
$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \gamma = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}F$$
4. On intègre la relation précédente pour trouver :
$$\omega(t) = -N\frac{R_T}{\sqrt{2}}F\,t + \omega_0$$
où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}$. La terre arrête de tourner à l'instant T tel que $\omega(T) = 0$ soit
$$\frac{2\pi}{T_S} = \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{R_T F}{J}T$$
5. On isole F dans la relation précédente :
$$F = \frac{2\sqrt{2}\pi J}{N R_T T_S} = 17.10^{12}\ \mathrm{N}$$

6. (a) Pour convertir cette donnée en Newton, il suffit de convertir la masse en kg puis de la multiplier par g, on trouve 15.10^{13} N.

   (b) On trouve une force 10 fois plus intense que celle trouvée précédemment. Pour que les données soient compatibles, il faut réduire le moment du couple et donc réduire le bras de levier. On en déduit que les propulseurs ne sont pas colinéaires à $\vec{e}_\theta$.



   (c)
   La bras de levier de la force F est désormais $\sin(\alpha)\,\frac{R_T}{\sqrt{2}}$.
   En reprenant l'égalité trouvée à la question 4, on obtient :

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi J}{NR_T T_S F}$$

   Ainsi, avec $F = 15.10^{13} N$ on trouve un angle α de 6°. Cela semble être en accord avec l'illustration sur laquelle les réacteurs sont quasiment verticaux. Sauf que... il ne faut pas oublier que les propulseurs sont sur le 45$^{\text{ième}}$ parallèle et que si la force qu'ils exercent est selon $\vec{e}_\theta$ alors, ils doivent être orientées à 45° par rapport au sol dans le plan contenant P et l'axe Nord-Sud.

2 L'ère de la fuite

1. Le rayon de la Terre est petit devant la distance Terre-Soleil on peut donc assimiler la Terre à un point matériel.
2. Si on travaille dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, par application du TMC,

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}edge\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{Cte} = m.\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = m.\vec{C}$$

   en posant $\vec{C} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = r^2\dot{\theta}$, la constante des aires.
3. Comme $\vec{L}_O = m.\vec{C}$ garde une direction fixe, celle de $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0$, le plan $(\overrightarrow{0M},\vec{v})$ reste orthogonal à cette direction fixe et le mouvement est plan.
4. Calculons le travail élémentaire de la force de gravitation $\vec{F}$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{r} = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r^2}\vec{e}_r.(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta) = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r^2}dr = -dE_p \qquad \text{avec } E_p = -\frac{\mathcal{G}M_S M}{r}$$

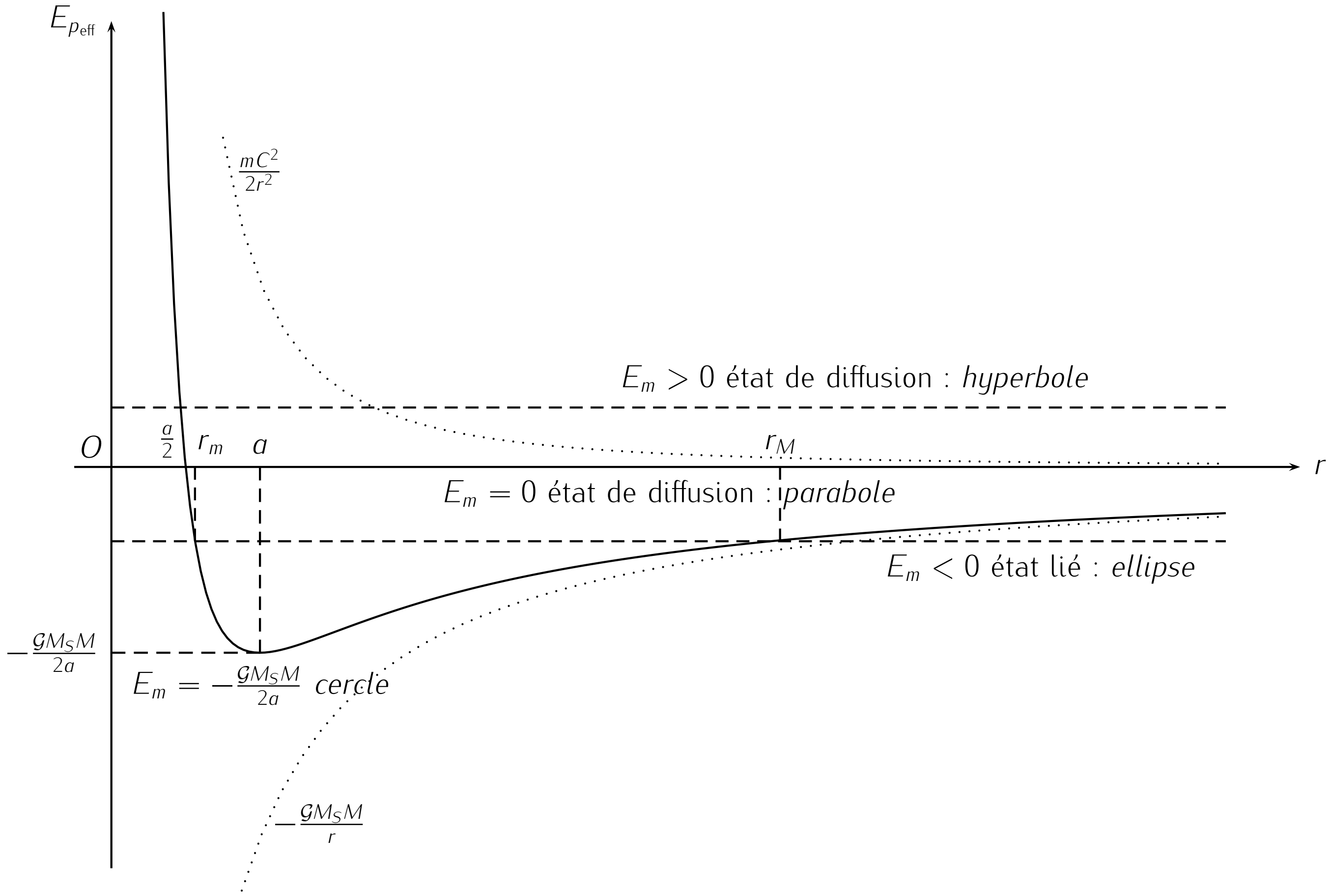
   si on prend $E_p(r \to \infty) = 0$ puisque il n'y a plus d'interaction si M trop loin de O.
   $\vec{F}$ est conservative et $E_m = Cte$ ne dépend que des CI.

5.

$$E_m(M/\mathcal{R}_g) = Cte = E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + E_p(r) = E_{p_{\text{eff}}} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \qquad \text{avec}$$

$$E_{p_{\text{eff}}} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \iff E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_SM}{r}$$

6. On obtient l'allure de $E_{p_{\text{eff}}}$ suivante :



Le mouvement est lié si $E_m < 0$

7. Si la trajectoire est circulaire alors $\dot{\theta}$ est constant (car $C = R_0^2\dot{\theta}$ est constant) et donc le mouvement est uniforme. Ainsi,

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_r = \frac{\vec{F}}{m} = -\mathcal{G}\frac{M_S}{R_0^2}\vec{e}_r \Rightarrow v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_S}{R_0}}$$

8. Pour un mouvement circulaire $E_c = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0}$ ainsi $E_m = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0}$.

9. Pour faire passer la Terre dans un état de diffusion, il faut $E_m \geq 0$ soit $\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{\mathcal{G}MM_S}{R_0} \geq 0$. Ainsi, la vitesse minimale que l'on doit communiquer à la Terre est $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}MM_S}{R_0}}$. Numériquement, on trouve $\Delta v = 12{,}3$ km.s^{-1}.

10. Numériquement $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0.14$ m.s^{-2}. On trouve la force à appliquer pour communiquer cette accélération à l'aide de la seconde loi de Newton : $F = ma$ donc $F = 8{,}6.10^{23}$ N. C'est bien plus grand que la force des 12000 propulseurs.

11. Le théorème de la puissance mécanique appliqué à la Terre donne $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} = cste$ soit $E_m = E_m(t=0) + \mathcal{P}t = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{2R_0} + \mathcal{P}t$, or $E_m = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{a(t)}$ donc $-\frac{\mathcal{G}MM_S}{2a(t)} = -\frac{\mathcal{G}MM_S}{2R_0} + \mathcal{P}t$, en isolant a, on

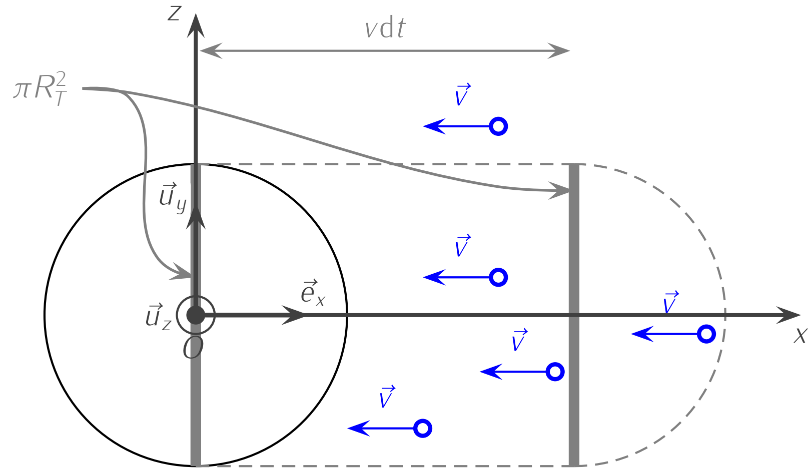
trouve :

$$a(t) = \frac{R_0}{1 - \frac{2R_0\mathcal{P}}{\mathcal{G}M_SM}t}$$

12. La Terre quitte l'attraction du Soleil lorsque E_m devient positive, ou autrement, à l'instant t tel que $a(t)$ diverge. Soit $1 - \frac{2R_0\mathcal{P}}{\mathcal{G}M_SM}t = 0$. Finalement, la terre est en état de diffusion à l'instant $t = \frac{\mathcal{G}M_SM}{2R_0\mathcal{P}}$. L'application numérique donne une durée de 14 000 ans ce qui n'est pas compatible avec le récit.

3 Ére de l'errance

Peu de temps après la mise en état de diffusion de la Terre, le Soleil explose et devient supernova, comme les astronomes l'avaient prévu quelques siècles auparavant. La Terre se dirige vers Proxima du centaure située à 4,244 années lumière, elle l'atteindra dans 2500 ans.

1. La Terre voyage à la vitesse de 510 km.s^{-1}.
2. 

3. Les particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t + \mathrm{d}t$ se trouve dans le volume $\mathrm{d}V = \pi R_T^2 v \mathrm{d}t$. La densité particulaire est $n^\star$ donc le nombre de particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t + \mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}N = n^\star \mathrm{d}V = \pi n^\star R_T^2 v \mathrm{d}t$.
4. Chaque particule possède une vitesse $-v\vec{e}_x$ avant la collision et donc une impulsion $\vec{p} = -mv\vec{e}_x$ puis possède une impulsion nulle après la collision. Sa variation de quantité de mouvement vaut donc $\delta\vec{p} = mv\vec{e}_x$.
5. La variation de quantité de mouvement de toutes les particules entrant en collision avec la Terre entre t et $t+\mathrm{d}t$ vaut alors $\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}Nmv\vec{e}_x = \pi mn^\star R_T^2 v^2 \mathrm{d}t\vec{e}_x$. La seconde loi de Newton appliquée aux particules donne :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{T->part}} = \pi mn^\star R_T^2 v^2 \vec{e}_x$$
6. D'après la troisième loi de Newton la force exercée sur la Terre vaut $-\pi mn^\star R_T^2 v^2 \vec{e}_x$. Celle-ci s'apparente bien à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -\beta v^2 \vec{e}_x$, avec $\beta = -\pi mn^\star R_T^2$.
7.
```python
M = 6e24 #masse de la Terre en kg
beta = 1e7 #coeff de frottement en kg/m
x = 0    #position initiale de la Terre
dt = 10  #pas de temps en s
e = 1e13 #épaisseur du nuage en m

while x<e :
```

```
    v = v - 1/m * beta*v**2 * dt #calcul v(t+dt)
    x = x + v*dt #calcul de x(t+dt)
print(v)
```

8. On trouve une augmentation de 15 jours.