Chapitre 31

Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

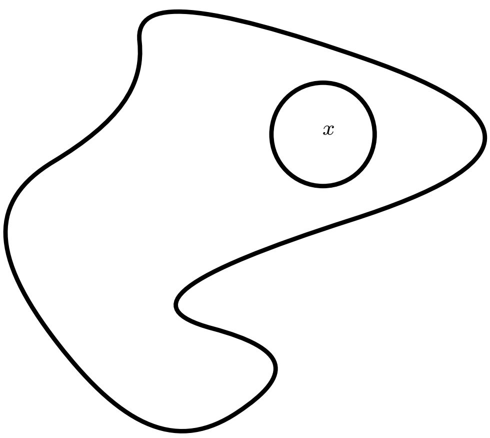
1 Continuité

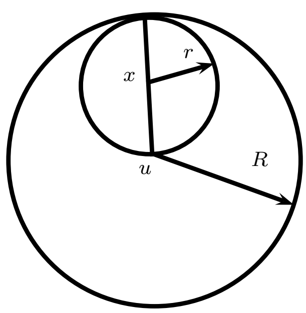
Définition 1.1 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$)

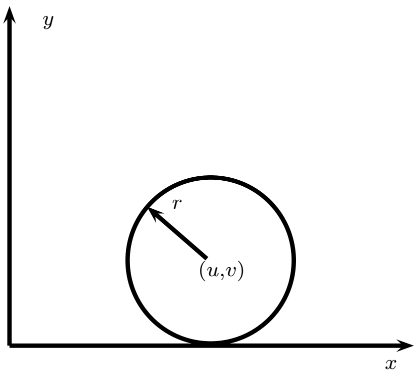
Un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ tel que,

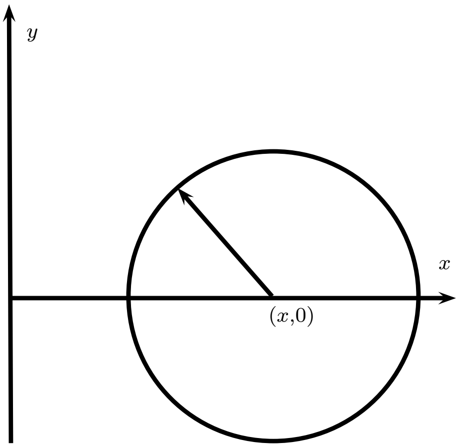
$$\forall\, x \in U,\ \exists\, r > 0,\ B(x,r) \subset U,$$

où $B(x,r) = \{z \in \mathbb{R}^2,\ \|z - x\| < r\}$ (disque centré en x) est la *boule ouverte* centrée en x.









Remarque.
La plupart du temps, on considérera des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.1 Fonctions à valeurs réelles

Dans tout ce paragraphe, A désigne un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, *i.e.* une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2 (Espace vectoriel des fonctions définies sur A à valeurs réelles)

L'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^A$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois

1. $\forall\ f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}),\ (x, y) \in A,\ (f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$.
2. $\forall\ f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R},\ (x, y) \in A,\ (\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y)$,

où l'élément neutre est la fonction identiquement nulle sur A. C'est également un anneau pour le produit défini par

$$\forall\ f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}),\ (x, y) \in A,\ (fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y).$$

Définition 1.3 (Continuité)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$.

1. La fonction f *admet une limite en* a si

$$\exists\ \ell \in \mathbb{R},\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ z \in A,\ \|z - a\| < \eta \Longrightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors

$$\ell = \lim_{z \to a} f(z).$$

2. Si $a \in A$, la fonction f est *continue en* a si elle admet une limite en a. Cette limite est alors nécessairement $f(a)$.
3. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Remarques.

1. La notion de limite est définie de la même manière que pour les fonctions à une variable réelle, en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$. En particulier, en cas d'existence, la limite est unique.
2. On rappelle que $(x(t), y(t))$ tend vers $(0,0)$ (ou plus généralement $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$) en t_0 signifie que x tend vers a_1 et y vers a_2 quand t tend vers t_0, ou encore que
$$\lim_{t\to t_0} \|(x(t), y(t)) - (a_1, a_2)\| = 0.$$
3. La fonction f tend vers 0 en a si et seulement si la fonction $|f|$ tend vers 0 en a.

Proposition 1.4

Soient $a \in \mathbb{R}^2$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_a g = 0$ et $|f - \ell| \leqslant g$. Alors $\lim\limits_a f = \ell$.

Proposition 1.5 (Opérations sur les limites)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$, $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ admettant respectivement ℓ et ℓ' comme limite en a. Alors

1. La fonction f est bornée au voisinage de a, *i.e.* il existe $M \geqslant 0$ et $r > 0$ tel que pour tout $z \in A$, on ait
$$\|z - a\| < r \Longrightarrow |f(z)| \leqslant M.$$
2. Si $\ell > 0$, alors f est minoré au voisinage de a par un réel > 0.
3. Si $\ell \neq 0$, alors $|f|$ est minoré au voisinage de a par un réel > 0.
4. La fonction $\lambda f + g$ admet $\lambda\ell + \ell'$ comme limite en a.
5. La fonction fg admet $\ell\ell'$ comme limite en a.
6. Si la fonction f ne s'annule pas sur A et si $\ell \neq 0$, la fonction $1/f$ admet $1/\ell$ comme limite en a.

Proposition 1.6 (Sous-espace vectoriel des fonctions continues)

L'ensemble $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(A)$ des fonctions continues sur A à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. C'est également un sous-anneau dont les éléments inversibles sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur A.

Proposition 1.7 (Composition des limites)

Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telles que $f(A) \subset B$.

1. Si f admet une limite b en $a \in \mathbb{R}^2$ et si g admet une limite ℓ en b, alors $g \circ f$ admet ℓ comme limite en a.
2. Si f est continue sur A et g est continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

Remarques.

1. Cette démonstration est exactement la même que celle de la composition des limites pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme. Ce n'est pas un hasard : la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

2. Cette proposition peut se décliner : si $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow D$ avec $f(A) \subset B$, **avec** A, B, C, D **des sous-ensembles de** $\mathbb{R}$ **ou de** $\mathbb{R}^2$, alors si f est continue sur A et g est continue sur B, $g \circ f$ est continue sur A. Il suffit de remarquer que $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ jouent le même rôle.

2 Calcul différentiel

2.1 Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Dans toute la suite de ce chapitre, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Dérivée suivant un vecteur)

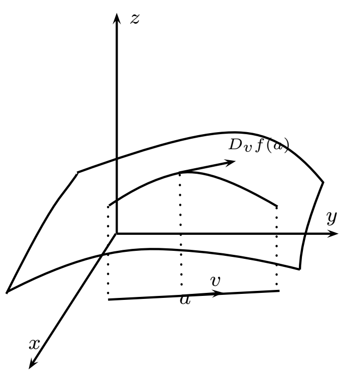
Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. La *dérivée de f en a suivant le vecteur v* est, s'il existe, le nombre réel

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

i.e. le nombre dérivé en 0 de la fonction $t \longmapsto f(a+tv)$. Elle est notée $D_v f(a)$.

Remarques.

1. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in U$. En effet, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Alors $\delta = r/\|v\|$ convient. On peut alors effectivement considérer $f(a+tv)$.
2. L'existence d'une dérivée suivant un vecteur en un point a n'implique pas la continuité de la fonction en ce point. Même l'existence des dérivées suivant tout vecteur en a n'implique pas la continuité, *cf.* l'exemple 2 ci-dessous.
3. La dérivée directionnelle en a suivant v permet d'obtenir la tangente à la courbe (de $\mathbb{R}^3$) $t \longmapsto (a+tv, f(a+tv))$.



Définition 2.2 (Dérivées partielles)

La *première (resp. deuxième) dérivée partielle* de f en a est, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a suivant le vecteur $(1,0)$ (resp. $(0,1)$). On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Définition 2.3

Les fonctions dérivées partielles de f sont, si elles existent, les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \end{array}.$$

Remarques.

1. Dans la pratique, pour calculer les dérivées partielles, on "fixe" une des variables et on dérive par rapport à l'autre, puisqu'il s'agit de dériver des fonctions partielles.
2. On verra souvent une notation du type

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

qui signifie qu'on dérive la fonction $y \longmapsto f(x, y)$ où x est fixé, et qu'on en calcule la valeur en (x, y).

2.2 Fonctions de classe C^1

Définition 2.4 (Fonctions de classe C^1)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si celles-ci sont continues sur U.

Proposition 2.5 (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Théorème 2.6 (Développement limité pour les fonctions de classe C^1)

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $a = (a_1, a_2) \in U$, *i.e.* il existe une fonction $\varepsilon : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$ et telle que

$$\forall\, u = (u_1, u_2) \in U,\ f(u) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(u_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(u_2 - a_2) + \|u - a\|\varepsilon(u),$$

ou de manière équivalente, si $A = \{h \in \mathbb{R}^2,\ a + h \in U\}$: il existe une fonction $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{h \to (0,0)} \varepsilon(h) = 0$ et telle que pour tout $h = (h_1, h_2) \in A$,

$$f(a + h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \|h\|\varepsilon(h).$$

Remarques.

1. L'idée est de faire une approximation linéaire au voisinage de a de la fonction $h \longmapsto f(a+h) - f(a)$: une approximation est l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(h_1, h_2) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2$.

2. La surface d'équation $z = f(x,y)$ dans $\mathbb{R}^3$ (le "graphe" de la fonction f) admet un plan tangent (généralisation de la notion de tangente au graphe d'une fonction) : c'est la plan d'équation

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

C'est en fait le plan qui contient toutes les tangentes à toutes les courbes tracé sur la surface $z = f(x,y)$, en (x_0, y_0).

Corollaire 2.7 (Continuité d'une fonction de classe C^1)

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U et admet une dérivée en tout point $a \in U$ suivant tout vecteur $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ et

$$D_v f(a) = v_1 D_1 f(a) + v_2 D_2 f(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

De plus, si $w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $D_{\lambda v + w} f(a) = \lambda D_v f(a) + D_w f(a)$.

Remarques.

1. La deuxième partie du corollaire peut aussi s'énoncer ainsi : l'application $v \in \mathbb{R}^2 \longmapsto D_v f(a)$ est une forme linéaire.
2. Si on considère une courbe paramétrée de l'espace $g : t \longmapsto (a + tv, f(a + tv))$ (notation du corollaire 2.7), on a $g'(t) = (v, D_v f(a)) = (a, \mathrm{d}f_a(v))$, qui est donc un vecteur directeur de la tangente à la courbe.

2.3 Fonctions composées

Proposition 2.8 (Dérivée d'une fonction composée : règle de la chaîne)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. Alors la fonction $f \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\forall\, t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \times \varphi_2'(t).$$

Remarque.

Il existe un moyen mnémotechnique très simple pour retenir cette formule. Si on écrit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (*i.e.* $\varphi_1(t) = x(t)$ et $\varphi_2(t) = y(t)$), on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t),$$

ou plus court, en "oubliant" les variables,

$$(f \circ \varphi)' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Proposition 2.9

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall\ (u,v) \in U,\ (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \in V$. Alors la fonction $g : (u,v) \longmapsto f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ définie sur U admet des dérivées partielles en tout $(u,v) \in U$, et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)$$

Remarque.

Pour s'en souvenir plus facilement :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}$$

et si on note $\varphi_1(u,v) = x(u,v)$ et $\varphi_2(u,v) = y(u,v)$, les formules deviennent :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

mais attention, revenez à la forme de la proposition pour les calculs. Les formules ci-dessus sont des moyens mnémotechniques pour se souvenir.

2.4 Gradient

Définition 2.10 (Gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$). La gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Proposition 2.11 (Dérivées directionnelles avec le gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$. Alors

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^2,\ D_v f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0)\ , v \rangle$$

(produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$).

Proposition 2.12 (Expression du développement limité à l'aide du gradient)

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in U$. Le développement limité de f en (x_0, y_0) à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0)\ , (h,k) \rangle + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k),$$

avec $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

Remarque.

La quantité $\langle \nabla f(x_0,y_0)\,, (h,k)\rangle$ est d'autant plus grande que le cosinus entre les deux vecteurs est grand : le gradient est la direction dans laquelle la fonction croit le plus vite.

Proposition 2.13 (Règle de la chaine avec le gradient)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U. Alors

$$\forall\, t \in I,\ (f\circ\varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t))\,, \varphi'(t)\rangle\,.$$

Remarque.

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction f, c'est-à-dire que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la courbe $\{(x,y)\in U \mid f(x,y)=\lambda\}$ admet pour normale $\nabla f(x,y)$ en tout point (x,y) où ce vecteur est non nul. En effet, si on a une courbe définie par $\varphi : I \longrightarrow U$, et si de plus $f(\varphi(t)) = \lambda$ pour tout $y \in U$, alors $(f\circ\varphi)'(t) = 0$ pour tout t (dérivée d'une fonction constante), ce qui implique par la proposition 2.13, que

$$\langle \nabla f(\varphi(t))\,, \varphi'(t)\rangle = 0,$$

donc que le vecteur $\nabla f(\varphi(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\varphi'(t)$.

3 Application : recherche d'extremums

Définition 3.1 (Extremum global)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum global sur A s'il existe $a \in A$ tel que : $\forall\,(x,y)\in A,\ f(a) \leqslant f((x,y))$.
2. f admet un maximum global sur A s'il existe $a \in A$ tel que : $\forall\,(x,y)\in A,\ f(a) \geqslant f((x,y))$.
3. f admet un extremum global sur A si elle admet un minimum ou un maximum global sur A.

Définition 3.2 (Extremum local)

Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

1. f admet un minimum local en $a \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall\,(x,y)\in A\cap B(a,r),\ f(a) \leqslant f((x,y))$.
2. f admet un maximum local en $a \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall\,(x,y)\in A\cap B(a,r),\ f(a) \geqslant f((x,y))$.
3. f admet un extremum local sur A si elle admet un minimum ou un maximum local sur A.

Définition 3.3 (Point critique)

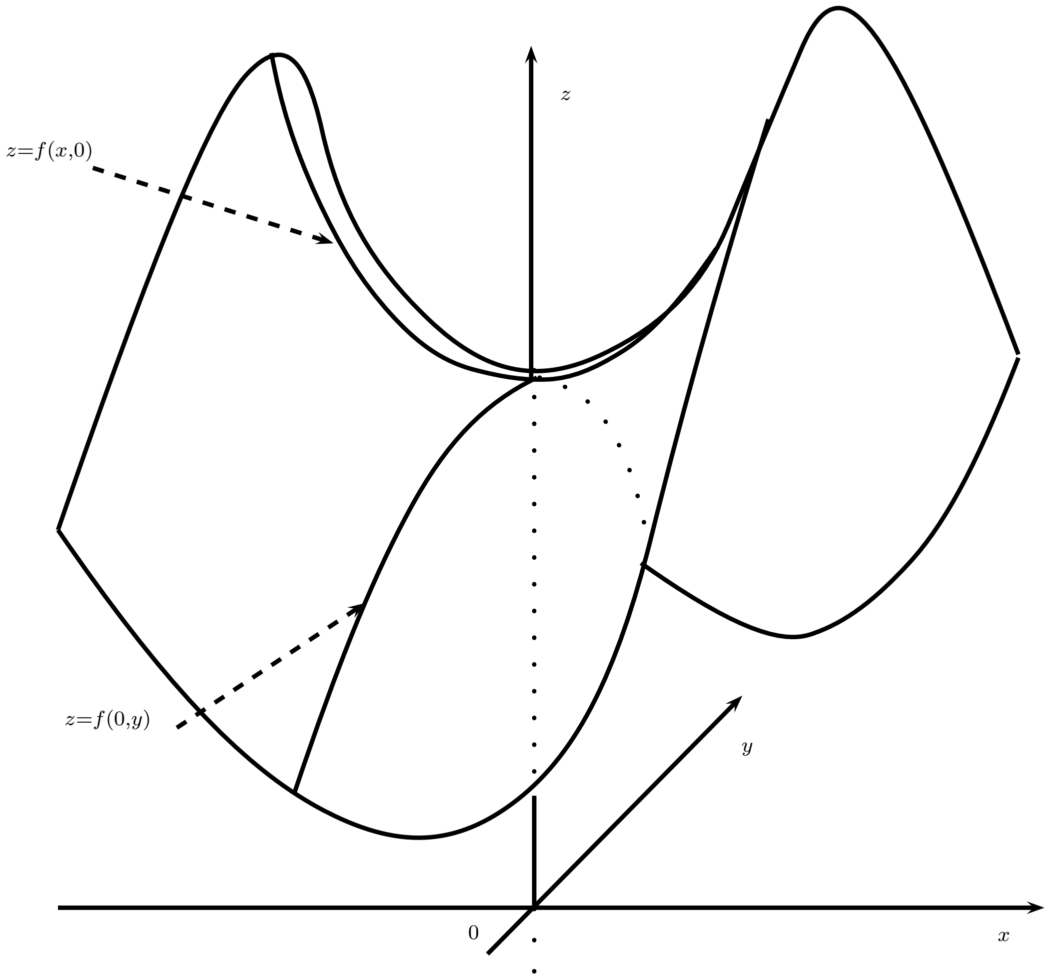
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Un point critique de f est un point $a \in U$ tel que $\nabla f(a) = (0,0)$, *i.e.* tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Proposition 3.4 (Condition nécessaire d'extremum en un point)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si f admet un extremum en a (local ou global), alors a est un point critique.

Remarques.

1. Ce résultat n'est vrai que pour un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (comme d'ailleurs le résultat pour les fonctions d'une variable réelle n'est vrai que sur un intervalle ouvert). En effet, la fonction f définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = xy$ admet un maximum en $(1,1)$ qui vaut 1, mais ses dérivées partielles ne sont pas nulles en $(1,1)$.
2. Ce n'est (comme pour les fonctions d'une variable réelle) qu'une condition nécessaire, comme le prouve l'exemple de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$, dont le gradient est nul en $(0,0)$, mais $f(x,0) = x^2 > f(0,0)$ si $x \neq 0$, et $f(x,y) = -y^2 < f(0,0)$ si $y \neq 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum pour f : c'est un *point selle* ou un *point col*.


z=f(x,0)
z
z=f(0,y)
y
0
x