Chapitre 30

Construction d'une intégrale

Dans ce chapitre, on fixe deux réels $a < b$, et on note $I = [a, b]$.

1 Continuité uniforme

Définition 1.1 (Continuité uniforme)

Une fonction f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque.

Attention à ne pas confondre avec la continuité simple. Le "η" est ici indépendant des points x et y. Pour f, cela signifie que, où que vous vous placiez dans son domaine de définition, si x varie au plus de η, $f(x)$ variera au plus de ε. Pour une fonction qui n'est que continue, le η va dépendre de x, donc de l'endoit où on se place dans le domaine de définition.

Proposition 1.2

1. Une fonction uniformément continue est continue.

2. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 1.3 (Heine)

Une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

2 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.1 (Subdivision d'un segment)

1. Une *subdivision* de I est une suite finie $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

2. Le *pas* de la subdivision est le réel $\delta(\sigma) = \max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$.

3. La subdivision est à *pas constant* si

$$\forall\, i = 1, \dots, n-1,\ x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}\ ,$$

et dans ce cas on a

$$\forall\, i = 1, \dots, n-1,\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Remarque.

Une subdivision de I s'identifie à un unique sous-ensemble fini de I contenant a et b, et réciproquement tout sous-ensemble fini de I contenant a et b défini une unique subdivision de I (il suffit classer les éléments de l'ensemble par ordre croissant). Cela permet d'écrire qu'une subdivision est incluse dans une autre, de faire l'union de deux subdivisions.

Définition 2.2 (Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux)

1. Une fonction f définie sur I est *en escalier* sur I s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de I telle que $f_{]x_{i-1},x_i[}$ soit constante pour tout $i = 1, \dots, n$.

2. On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I.

3. Une fonction f définie sur I est *continue par morceaux* sur I s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de I telle que $f_{]x_{i-1},x_i[}$ soit continue pour tout $i = 1, \dots, n$, et telle que f admette des limites finies à gauche et à droite en tout x_i, $i = 0, \dots, n$, ce qui est équivalent à dire que pour tout $i = 1, \dots, n$, f est la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ d'une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$.

4. On note $\mathcal{CPM}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Remarques.

1. Les subdivisions de la défintion sont dites *subordonnées* (ou *adaptées*) à f.
2. Il y a une infinité de subdivision subordonnée à une fonction en escalier (ou continue par morceaux). En particulier, si σ en est une, toute subdivision σ' telle que $\sigma \subset \sigma'$ en est une également.
3. La valeur de la fonction en $x_0, \dots, x_n$ n'a pas d'importance.
4. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
5. Attention, pour être continue par morceaux, il faut des limites finies à droite et à gauche aux points de la subdivision !

Proposition 2.3

1. Une fonction en escalier est continue par morceuax.

2. Une fonction continue est continue par morceaux.

Proposition 2.4

Les ensembles $\mathcal{E}(I)$ et $\mathcal{CPM}(I)$ sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de $\big(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times\big)$.

Remarque.

Essentiellement, on dit que les combinaisons linéaires de fonctions en escalier (resp. cpm) sont en escalier (resp. cpm).

Proposition 2.5

Une fonction continue par morceaux sur I est bornée.

Théorème 2.6 (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I, et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur I telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire 2.7

Soit f une fonction continue par morceaux sur I et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction φ en escalier sur I telle que

$$|f - \varphi| < \varepsilon.$$

Corollaire 2.8

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I. Alors il existe une suite $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, *i.e.* telle que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant n_0,\ \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

3.1 Intégrale des fonctions en escalier

Proposition 3.1

Soit f une fonction en escalier sur I et

$$\sigma = (x_0, \dots, x_n), \qquad \sigma' = (x'_0, \dots, x'_m)$$

deux subdivisions subordonnées à f, et $y_0, \dots, y_{n-1}$, $y'_0, \dots, y'_{m-1}$ des réels tels que

$$x_i < y_i < x_{i+1}, \qquad x'_j < y'_j < x'_{j+1}$$

pour tous $i = 0, \dots, n-1$ et $j = 0, \dots, m-1$. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) = \sum_{j=0}^{m-1} (x'_{j+1} - x'_j) f(y'_j).$$

Définition 3.2 (Intégrale des fonctions en escalier)

Soit f une fonction en escalier sur I. On définit son intégrale sur I par

$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

où $\sigma = (x_0 \dots, x_n)$ est une subdivision quelconque subordonnée à f.

Remarques.

1. La proposition prouve que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.
2. Remarquez qu'on définit l'intégrale sur le segment I, et qu'on n'utilise pas (encore) la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ que vous connaissez.
3. Cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.
4. Faîtes un dessin pour vous rendre compte de ce que représente cette intégrale. On remarquera qu'elle est l'aire algébrique de la surface délimitée par l'axe Ox et la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
5. Si f est constante sur I, on a alors
$$\int_I f = (b-a)f(c)$$
pour tout $c \in I$.
6. L'intégrale ne dépend pas de la valeur de f aux points d'une subdivision.

Proposition 3.3 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f, g des fonctions en escalier sur un segment I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$, *i.e.* l'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{E}(I)$.

Proposition 3.4 (Croissance et positivité de l'intégrale)

Soient f, g des fonctions en escalier sur un segment I.

1. si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).
2. Si $f \geqslant g$, alors $\displaystyle\int_I f \geqslant \int_I g$ (croissance de l'intégrale).

3.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Théorème 3.5

Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Alors

$$\sup\left\{\int_I \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}(I),\ \varphi \leqslant f\right\} = \inf\left\{\int_I \psi,\ \psi \in \mathcal{E}(I),\ \psi \geqslant f\right\}.$$

Définition 3.6 (Intégrale des fonctions continues par morceaux)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On définit l'intégrale de f sur I par

$$\int_I f = \sup\left\{\int_I \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}(I),\ \varphi \leqslant f\right\} = \inf\left\{\int_I \psi,\ \psi \in \mathcal{E}(I),\ \psi \geqslant f\right\}.$$

<u>Notation usuelle</u> : si $f \in \mathcal{CPM}(I)$ et $c, d \in I$, on pose

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{[c,d]} f & \text{si } c < d \\ 0 & \text{si } c = d \\ -\int_{[d,c]} f & \text{si } d < c. \end{cases}$$

3.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition 3.7 (Linéarité)

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g,$$

i.e. l'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{CPM}(I)$.

Proposition 3.8 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur I. Alors

1. Si $f \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$. En particulier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité)

2. Si $f \geqslant g$, on a $\displaystyle\int_I f \geqslant \int_I g$. En particulier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (croissance).

Proposition 3.9 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I)$. Alors $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$. En particuier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.

Remarque.

Si on ne sait rien sur a et b, on a encore $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\right|$.

Proposition 3.10 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I)$ et $c, d, e \in I$. Alors $\displaystyle\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \int_c^e f(t)\mathrm{d}t + \int_e^d f(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 3.11 (Intégrale des fonctions paires et impaires)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[-a, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

1. Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.

2. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 3.12 (Intégrale des fonctions périodiques)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, +\infty[$, et T-périodique ($T > 0$). Alors

$$\forall\, b \geqslant a,\ \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Théorème 4.1

Soit f une fonction **continue** sur I, et $x_0 \in I$. La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

est **la** primitive de f s'annulant en x_0.

Corollaire 4.2

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Pour tous $x_0, x \in I$, on a $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 4.3

Soit f une fonction **continue et de signe constant** sur I. Alors

$$f = 0 \iff \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Remarque.

Attention, ce théorème est faux si f est juste continue par morceaux.

Corollaire 4.4

Soit f une fonction continue, positive, non nulle sur $[a, b]$ ($a < b$). Alors $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x > 0$.

Remarque.

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux si ses parties réelle et imaginaire le sont. On définit alors
$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \int_I \mathrm{Im}(f).$$
On a les même propositions que pour les fonctions à valeurs réelles, sauf bien entendu la positivité, la croissance, ni le théorème 4.3.

Proposition 4.5 (Sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$), $n \in \mathbb{N}^*$. Les sommes
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right), \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$
sont des sommes de Riemann associées à f sur $[a, b]$, et
$$R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f, \qquad R'_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$
En particulier, pour $a = 0$ et $b = 1$, on a
$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right), \qquad R'_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

5 Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, nous voyons des formules qui permettent d'approcher des fonctions par des fonctions polynomiale.

Théorème 5.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors pour tous $a, b \in I$, on a
$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + t(b-a))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
C'est la *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre a et b*, ou encore *formule de Taylor avec reste intégral en a* si on ne veut pas préciser b.

Corollaire 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{u\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(u) \right|.$$