Algèbre - Chapitre 12 : Applications linéaires
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Déterminez leur noyau dans le cas où elles le sont.

1. $f : (x, y, z) \mapsto x - y - 2z$
2. $f : (x, y) \mapsto xy$
3. $f : x \mapsto (-3x, x, 4x)$
4. $f : (x, y, z) \mapsto (x-y, y+z, x-z)$
5. $f : (x, y) \mapsto x + y + 1$
6. $f : (x, y) \mapsto (x - y, 2x + 3y)$.
7. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
8. $f : (x, y, z) \mapsto (x-y, y+z, x-z)$

Exercice 2 :

1. Justifiez que les applications ci dessous sont linéaires et précisez leur noyau :
   a) $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$.
   b) $\psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définie par $\psi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$
2. Montrez que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathcal{C}^0}$.
3. Montrez que malgré tout ni φ, ni ψ ne sont bijectives.

Exercice 3 :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications telles que f est linéaire et surjective, et $g \circ f$ est linéaire.

Montrez que g est linéaire.

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit f définie sur E par $f(P) = P + (1 - x)P'$

1. Montrez que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminez son noyau.

Exercice 5 :

Soit $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; x + y + z = 0 \right\}$ et $F = \text{Vect}\,(-1, 1, 1)$.

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Exprimer $p((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Même question avec s la symétrie par rapport à E de direction F.

Exercice 6 :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et soit u un endomorphisme défini par

$$u(e_1) = e_3, u(e_2) = -e_2 \text{ et } u(e_3) = e_1$$

1. Justifiez qu'il n'y a qu'un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ vérifiant cette propriété.
2. Montrez qu'il s'agit d'une symétrie dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 7 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f, l'application qui à tout polynôme P de E associe son reste dans la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est une projection.
3. Préciser F et G tels que f soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$

1. Montrez que f est un automorphisme et exprimez f^{-1} en fonction de f et id_E.
2. Montrez que $\text{Ker}(f - id_E)$ et $\text{Ker}(f - 2id_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 9 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g = g \circ f$.

Montrez qu'alors $\text{Ker} f$ et $\text{Im}\, f$ sont stables par g.

Exercice 10 :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, $f(x)$ et x sont colinéaires. Montrez que f est une homothétie.