Algèbre - Chapitre 12

Applications linéaires : généralités

I L'espace $\mathscr{L}(E,F)$

1) Définitions et exemples

Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si et seulement si elle vérifie :

(i) Pour tous u et v vecteurs de E, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples :

- Soit $f : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-2y) \end{array}$

  Montrons que f est linéaire.

- Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$ (où P' est la dérivée de P). Alors f est linéaire :

- Si E est un espace vectoriel, on note id_E l'application identité de E, définie par

$$\text{pour tout } u \in E,\ id_E(u) = u$$

  De manière immédiate, id_E est une application linéaire.
- ▶ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$f : \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{p,1} & \to \mathcal{M}_{n,1} \\ X & \mapsto AX \end{array}$$

  Alors f est linéaire :

Propriété 1 :
Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

▷ *Preuve* :

◁

Par contraposition, $\boxed{\text{si } f(O_E) \text{ n'est pas } O_F, \text{ alors } f \text{ n'est pas linéaire.}}$
Par exemple : soit $u \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq (0,0)$. On appelle translation de vecteur u l'application

$$t_u : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x,y) + u \end{array} \right.$$

Ce n'est pas linéaire, car $t_u((0,0)) = u \neq (0,0)$ ...

A noter : **VOCABULAIRE SPÉCIFIQUE**

Les applications linéaires sont également appelées "morphismes" d'espace vectoriel. Le terme "morphisme" est relatif à la "forme" des espaces vectoriels : une application linéaire est en effet une application compatible avec les combinaisons linéaires...

Dans le cas où $f : E \to E$, on parle d'**endomorphisme** de E ("morphisme interne"), et on note simplement $f \in \mathscr{L}(E)$. (cf partie III)

Dans le cas où $f : E \to F$ est bijective, on parle d'**isomorphisme** ("même forme") de E dans F.

Dans le cas où f est un endomorphisme bijectif, on parle d'**automorphisme** de E, et l'on note $f \in GL(E)$ (cf partie III).

Enfin, si $f : E \to F$ avec $F = \mathbb{K}$ (c'est à dire que l'image d'un vecteur par f est un scalaire), on parle de **forme linéaire**.

Encore des exemples :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax$.
  Alors f est une application linéaire.
  En effet :

  C'est un endomorphisme car l'espace de départ est le même que celui d'arrivée.

  De plus, si $a \neq 0$, f est bijectif (de bijection réciproque $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{1}{a}x)$). C'est alors un automorphisme de $\mathbb{R}$.
- Soit $p : \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x,0) \end{array} \right.$ .Cette application est appelée projection sur l'axe des abscisses.
  On montre qu'elle est linéaire :

  Comme l'ensemble de départ est celui d'arrivée, f est un endomorphisme.

2) Opérations dans $\mathscr{L}(E,F)$

a) Combinaisons linéaires

Proposition 1 :

Soient f et g appartenant à $\mathscr{L}(E,F)$, soient λ et μ deux scalaires. On définit l'application $\lambda f + \mu g$ par,

$$\forall u \in E, (\lambda f + \mu g)(u) = \lambda f(u) + \mu g(u)$$

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$
Autrement dit : toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

▷ *Preuve* : Soit $h = \lambda f + \mu g$ et montrons que h est linéaire.

◁

A noter : **C'EST ENCORE UN ESPACE VECTORIEL !**

D'après la définition donnée dans la proposition, on a directement les propriétés suivantes :
Pour tout $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$,
2. $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$
3. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$.

De plus, soit l'application

$$O_{\mathscr{L}(E,F)} : \left\{ \begin{array}{ll} E & \to F \\ \vec{u} & \mapsto O_F \end{array} \right.$$

Elle est telle que $f + O_{\mathscr{L}(E,F)} = f$ et elle est donc neutre pour $+$.

Ainsi, $\mathscr{L}(E,F)$ est lui même un espace vectoriel, et ce qui joue le rôle de "vecteur nul" est l'application $O_{\mathscr{L}(E,F)}$ ci dessus...

b) Composition

Proposition 2 :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.
Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
Autrement dit : la composition de deux applications linéaires est linéaire.

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 2 : Bilinéarité de la composition

si f, g et h sont des applications linéaires (avec les "bons" ensembles de départ et d'arrivée), on a :

- $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ et $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f \circ (\lambda g) = \lambda f \circ g$

▷ *Preuve* :

◁

Au secours ! **Bilinéarité ?**

La bilinéarité est une propriété des applications de deux variables, définie de manière analogue à la linéarité pour les applications à une seule variable :

$f : \begin{array}{ll} E \times F & \to G \\ (u,v) & \mapsto f(u,v) \end{array}$ est dite bilinéaire si et seulement si

- Pour tout $v \in F$, l'application $u \mapsto f(u,v)$ est linéaire.
- Pour tout $u \in E$, l'application $v \mapsto f(u,v)$ est linéaire.

Autrement dit : f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Ici : on peut voir la composition comme étant une application de deux variables : à f, et g des applications, on associe l'application $f \circ g$.
La propriété 2 vue ci dessus affirme bien que la composition est bilinéaire....

c) Isomorphisme et bijection réciproque

Proposition 3 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ un isomorphisme (c'est à dire une application linéaire bijective).
Alors f^{-1} (la bijection réciproque) est linéaire de F dans E (ie. $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$).

▷ *Preuve* :

◁

3) Image directe et réciproque par une application linéaire

a) Rappel :

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. On appelle **image directe** de A par f l'ensemble noté $f(A)$ défini par
$$f(A) = \{f(u), u \in E\}$$
2. On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par
$$f^{-1}(B) = \{u \in E, f(u) \in B\}$$

b) Cas des applications linéaires :

Propriété 3 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $G \subset E$ un sous espace vectoriel de E.
Alors $f(G)$ est un sous espace vectoriel de F.

▷ *Preuve* :

◁

et pour l'image réciproque :

Propriété 4 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $G \subset F$ un sous espace vectoriel de F.
Alors $f^{-1}(G)$ est un sous espace vectoriel de E.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

II Noyau et image d'une application linéaire

1) Noyau

a) Définition

Définition :
On appelle **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$, noté $\mathrm{Ker}f$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}f = \{u \in E ; f(u) = 0_F\}$$

Le noyau est donc l'ensemble des vecteurs dont l'image par f est le vecteur nul.

Propriété 5 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. $\mathrm{Ker}f$ est un s.e.v. de E.

▷ *Preuve :*

◁

Méthode : CHERCHER LE NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE
On suit la définition et on résout l'équation vectorielle d'inconnue $u \in E$:

$$f(u) = 0_F$$

Dans de très nombreux cas, cela va nous fournir un système d'équations...

Exemple
Soit f définie par $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$. Déterminons $\mathrm{Ker}f$:

b) Lien avec l'injectivité

Rappel :
Soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est injective si et seulement si et seulement si $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.
Cela signifie en fait que tout élément de F admet au plus un antécédent par f : deux éléments de E ne peuvent avoir même image.

Proposition 4 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{O_E\}$$

▷ *Preuve* :

◁

2) Image d'une application linéaire

a) Définitions

Définition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On définit l'image de f, notée $\mathrm{Im}\, f$ par

$$Imf = f(E) = \{f(u); u \in E\} = \{y \in F; \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = y\}$$

Exemple

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (2x+y+3z, 2y+2z, x+y+2z)$.

Proposition 5 :

Si il existe $(u_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E (autrement dit, si $E = Vect\left((u_i)_{i\in I}\right)$, alors

$$\operatorname{Im} f = Vect\left((f(u_i))_{i\in I}\right)$$

Autrement dit : l'image de f est engendrée par les vecteurs images d'une famille génératrice de E..

▷ *Preuve* :

◁

⚠ On obtient avec ce résultat une famille génératrice, pas forcément une base....

b) Rang d'une application linéaire

Définition :

On dit qu'une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est **de rang fini** si et seulement si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
On appelle alors **rang** de f, noté $\operatorname{rg}(f)$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Remarque :
Dès lors que E est de dimension finie, d'après la proposition 5, f sera donc de rang fini.

Exemple :
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$.

Proposition 6 :

Le rang de f est le rang de la famille de vecteurs images par f d'une famille génératrice de E (quelle que soit la famille choisie).

▷ *Preuve* : Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ engendre E. On a définit le rang de $\mathcal{B}$ comme étant la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs. Comme $\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$, l'égalité est immédiate. ◁

III Endomorphismes

1) Ensemble des endomorphismes

a) Définition

Définition :

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E tout application linéaire f de E dans E. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples :

- L'application id_E, l'identité de E est un endomorphisme de E.
- Pour tout $\lambda \in K$, l'application

$$\begin{array}{ll} E & \to E \\ u & \mapsto \lambda u \end{array}$$

  est un endomorphisme de E.
  Cette application est appellée **homothétie de rapport** λ.

b) Opérations dans $\mathscr{L}(E)$

L'ensemble des endomorphismes de E est un cas particulier de $\mathscr{L}(E, F)$ et on a donc immédiatement le résultat suivant

Propriété 6 :

Les combinaisons linéaires et les compositions d'endomorphismes de E sont des endomorphismes de E.

En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$, comme pour tout $u \in E$, $f(u) \in E$, on peut composer f par lui même. Cela donne la définition ci dessous :

Définition : Puissances (positives) d'endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose f^p l'endomorphisme défini :

- $f^0 = id_E$
- si $p > 0$, $f^p = f \circ f^{p-1}$

Autrement dit, $f^p = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{p fois}$.

Par exemple, la composée $f \circ f$ peut être notée f^2.

Danger ! **VRAIE PUISSANCE ?**

Il ne s'agit pas d'une puissance au sens du produit !
Bien qu'il n'y ait en réalité pas d'ambigüité possible avec le produit (car les éléments traités sont vectoriels et qu'on n'a pas de produit de vecteurs qui donnent des vecteurs), il faudra être prudent : il s'agit bien de la composée.

c) Cas des automorphismes

Définition :

On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme de E bijectif. On note alors $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes.

Remarque :
$GL(E)$ signifie "groupe linéaire de E". La notion de groupe, bien que hors programme en PCSI, est une notion importante en mathématiques. L'ensemble des automorphismes, muni de la loi de composition, en est un exemple :

(i) Il est stable par la loi $\circ$: si f et g sont des automorphismes, alors $f \circ g$ est un automorphisme également (de reciproque)

(ii) Il y a un neutre pour la composition :

(iii) Pour tout $f \in GL(E)$, il existe $g \in GL(E)$ tel que $f \circ G$ est l'élément neutre : $g =$

On peut alors élargir la définition de puissance données pour les endomorphismes :

Définition : Puissances (relatives) d'automorphisme

Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ un automorphisme.
Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose f^p l'automorphisme défini par :

- $f^0 = id_E$
- si $p > 0$, $f^p = f \circ f^{p-1}$
- si $p < 0$, $f^p = (f^{-1})^p$ où f^{-1} est la bijection réciproque de f.

2) Projecteurs

a) Définitions

Rappel
Soit E un espace vectoriel. On dit que deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si $E = F_1 \oplus F_2$.
Cela signifie que, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tels que

$$u = u_1 + u_2$$

Définition :

- Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.

  On appelle **projection** (ou **projecteur**) de E sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie pour tout vecteur $u = u_1 + u_2$ de E (avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$) par $p(u) = u_1$.

- Soit p un endomorphisme de E. On dit que p est un **projecteur** si et seulement si il existe F_1 et F_2 avec $E = F_1 \oplus F_2$ tels que p est la projection (ou le projecteur) de E sur F_1 parallèlement à F_2

Remarque
Si p est un projecteur de F_1 parallèlement à F_2, on dit aussi que F_2 est la direction de la projection.

b) Propriétés

Propriété 7 :
Si p est un projecteur, alors p est un endomorphisme de E.

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 8 :
Soit p un projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2.
Alors $\operatorname{Ker}(p) = F_2$ et $Im(p) = F_1$.

De plus, $Im(p) = \operatorname{Ker}(p - Id_E) = \{u \in E; p(u) = u\}$

▷ *Preuve* :

◁

c) Caractérisation des projecteurs

Theorème 1 :
Soit f un endomorphisme de E.
Alors f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

▷ *Preuve* :

◁

Méthode : DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES D'UN PROJECTEUR

Après avoir montré que $f \circ f = f$, il suffit de déterminer Ker$f$ pour obtenir F_2, c'est à dire la direction de la projection.
Pour trouver F_1, on peut chercher $Im(f)$, mais il peut être plus efficace de chercher Ker$(f - Id_E)$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs u de E vérifiant $f(u) = u$, c'est à dire les *invariants* par f (autrement dit des sortes de "vecteurs fixes", qui ne sont pas modifié par la projection).

3) Symétrie

a) Définition

Définition :

- Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.

  On appelle **symétrie** de E par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application s définie pour tout vecteur $u = u_1 + u_2$ de E (avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$) par $s(u) = u_1 - u_2$.
- De manière générale, on dit que s est une symétrie si et seulement si il existe F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E avec $E = F_1 \oplus F_2$ tels que s est la symétrie de E par rapport à F_1 parallèlement à F_2 .

b) Propriétés

Propriété 9 :

Si s est la symétrie par rapport à F_1 parallement à F_2, alors

1. s est linéaire
2. $F_1 = \{u \in E, s(u) = u\} = \mathrm{Ker}(s - id_E)$: c'est l'ensemble des "invariants" par s.
3. $F_2 = \{u \in E, s(u) = -u\} = \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

▷ *Preuve* :

◁

c) Caractérisation

Proposition 7 :

Une application $s : E \to E$ est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s \circ s = id_E$