DÉBUT SEPTEMBRE

Les étoiles, qui sont des boules de gaz, ont un rayon qui oscille dans le temps. On cherche une formule pour la fréquence des oscillations. La cohésion des étoiles est assurée par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir :
- R, le rayon de l'étoile ;
- ρ, la masse volumique ;
- $\mathcal{G}$, la constante intervenant dans la force de gravitation entre deux masses.

1. Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et $\mathcal{G}$.
2. Sachant que la valeur de $\mathcal{G}$ est connue, quelles données peut-on obtenir à partir de la fréquence de vibration ?

MI-SEPTEMBRE

Une cuve en verre à la forme d'un prisme de section droite rectangle isocèle. Elle est posée horizontalement sur une des arêtes de longueur l du triangle isocèle, et le sommet opposé à ce coté est ouvert pour permettre de remplir la cuve d'un liquide transparent d'indice n. Un pinceau de lumière est envoyé horizontalement sur la face verticale de la cuve, dans le plan de section droite et à la hauteur $l/2$.
Ce rayon émerge au delà de l'hypoténuse et rencontre en un point P un écran E placé verticalement à la distance l de la face d'entre du dispositif. On néglige l'effet dû aux parois en verre sur la propagation du pinceau de lumière. En P, on observe sur l'écran une tache du pinceau à la hauteur z, repérée par rapport à l'horizontal formée par le bas de la cuve.

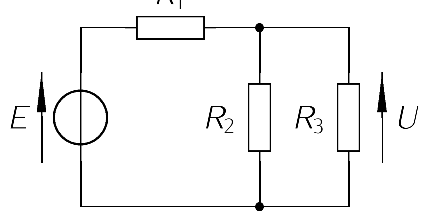
1. Faire un dessin du dispositif.
2. Quelle valeur supérieure peut-on donner à la valeur de l'indice n ?
3. Exprimer n en fonction de l et z. On prendra $\frac{l}{2} - z$ faible.
   Faire l'application numérique pour $l = 30$ cm et $z = 14{,}7$ cm.

FIN SEPTEMBRE

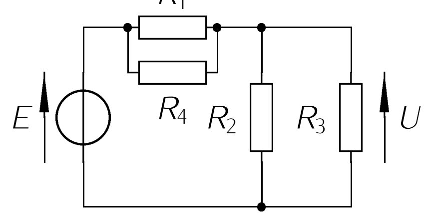
On donne deux lentilles L_1 et L_2, distantes de $3a$.
Pour L_1, $\overline{O_1F_1'} = 2a$ et pour L_2, $\overline{O_2F_2'} = -3a$ avec $a > 0$ (valeurs algébriques).
Un objet virtuel AB est placé sur l'axe optique de telle sorte qu'en valeurs algébriques, $\overline{O_1A} = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$.
La lumière frappe d'abord L_1.
Déterminer l'image $A'B'$ de AB par construction graphique puis par le calcul de $\overline{F_2'A'}$.

OCTOBRE

Utiliser les formules des diviseurs de tension pour déterminer la tension U aux bornes de R_3 dans les montages suivants.



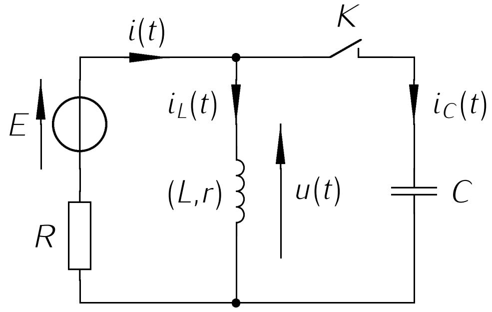
Circuit 1



Circuit 2

Novembre

Une bobine réelle, d'inductance L et de résistance interne r, est alimentée par un générateur de f.é.m. E et de résistance interne R depuis un temps assez long.
On branche à ses bornes (en fermant l'interrupteur K) un condensateur parfait de capacité C à un instant que l'on prendra comme origine des temps. Le condensateur était initialement déchargé.

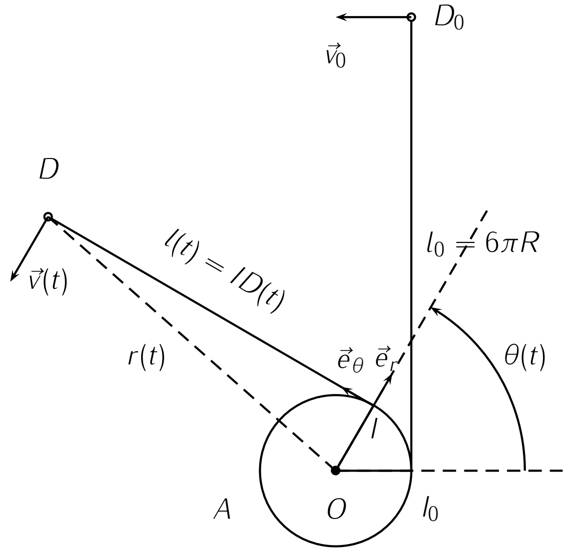


1. Rappeler le modèle équivalent de la bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r.
2. Déterminer les valeurs des grandeurs $u(t)$, $i(t)$, $i_L(t)$ et $i_C(t)$, définies sur le schéma ci-contre, juste avant la fermeture de l'interrupteur, puis juste après la fermeture de l'interrupteur et enfin au bout d'un temps suffisamment long.
3. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$; exprimer alors en fonction de r, R, L et C la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de ce circuit, puis calculer leur valeurs.
4. À partir des valeurs numériques trouvées, montrer qu'il s'établit dans le circuit un régime pseudo-périodique amorti de pulsation ω, que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q.
5. Déterminer alors littéralement l'expression la plus "légère" possible de $i_L(t)$, puis donner son expression numérique.
6. Tracer le graphe de $i_L(t)$ pour $0 \leq t \leq 80$ ms.

Application numérique : $L = 0{,}1$ H ; $C = 200$ μF ; $r = 10$ Ω ; $R = 50$ Ω ; $E = 120$ V.

Décembre

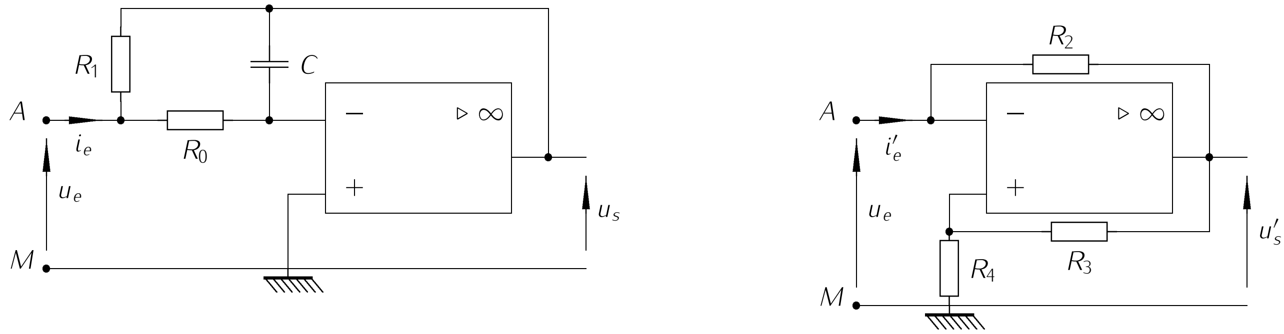
Le chien Domino D est attaché à un arbre A circulaire de rayon R par l'intermédiaire d'une laisse de longueur $l_0 = 6\pi R$ constante qui s'enroule autour de l'arbre.
Il commence à courir à la date $t = 0$ (position D_0) avec une vitesse tangentielle à tout instant et de norme constante v_0, sa laisse restant tendue en permanence.



1. Donner en coordonnées polaires l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OD}$ du chien Domino à la date t en l'assimilant au point D.
2. En déduire l'expression de sa vitesse.
3. Exprimer son accélération $\vec{a}$ en fonction des constantes, des vecteurs de base et de θ.
4. En utilisant l'hypothèse $v = v_0$ constante, déterminer les équations horaires du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.
5. Écrire en coordonnées polaires l'équation $r(\theta)$ de la trajectoire et tracer son allure.
6. À quel endroit et à quelle date la course s'achève-t-elle ?

Janvier

1. On considère le circuit à gauche ci-dessous, en régime sinusoïdal permanent, l'AO. est idéal.



   (a) Établir l'équation reliant les amplitudes complexes $\underline{U}_e$ et $\underline{U}_s$.
   De quel type de montage s'agit-il ? Que remarquez-vous à propos de R_1 ?

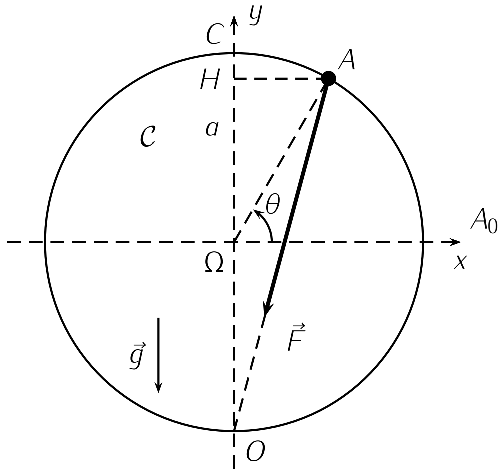
   (b) Calculer l'admittance d'entrée $\underline{Y}_e$ du montage et montrez que c'est celle de d'éléments passifs en parallèle dont on précisera la nature.

2. On monte en parallèle entre les bornes A et M le circuit représenté à droite ci-dessus (AO. idéal et supposé en fonctionnement linéaire). Calculer son admittance complexe $\underline{Y'}_e$.
3. Que devient l'admittance d'entrée de l'ensemble du montage ?
   À quelle condition sur les résistances obtient-on l'équivalent d'une inductance pure ?

Début Février

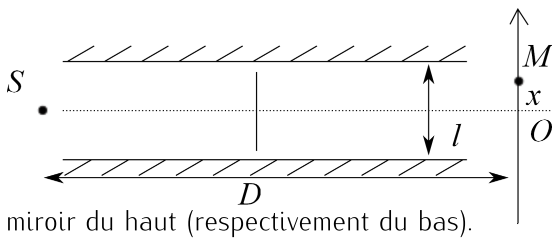
Un point A, de masse m, est mobile sans frottement sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon a contenu dans un plan vertical.
En plus de son poids, il est soumis de la part du point le plus bas O du cercle à une force de rappel $\vec{F} = -k.\overrightarrow{OA}$.
On suppose que A reste toujours en contact avec $\mathcal{C}$.

1. Exprimez l'énergie totale E_m de A en fonction de θ, $\dot{\theta}$, m, a, g et k.
2. Quelle doit être la vitesse v_0 de passage au point A_0 pour que le mobile atteigne le point C avec une vitesse nulle ?



mi-Février

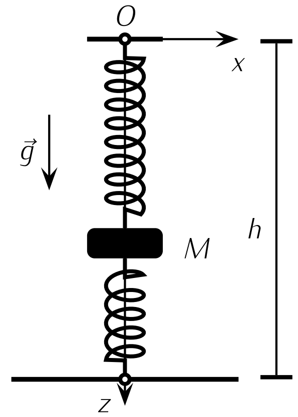
S est une source lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ. La plaque opaque E élimine la lumière allant directement de la source vers l'écran. Celui-ci reçoit donc uniquement la lumière qui a été réfléchie soit pas le miroir du haut, soit par le miroir du bas (on suppose qu'il n'y a qu'une seule réflexion).



1. Représenter les images S_1 (respectivement S_2) de S par le miroir du haut (respectivement du bas).
2. Tracer la propagation de deux rayons lumineux issus de S et arrivant en un point M de l'écran.
3. Exprimer la différence de marche $\delta = S_2M - S_1M$ en fonction de l x et D. Montrer que δ peut s'écrire $\delta = \frac{ax}{D}$ (on utilisera le fait que $\sqrt{1+\epsilon} \simeq= 1 + \frac{1}{2}\epsilon$.
4. Calculer alors le déphasage entre les deux ondes lumineuses arrivant en M.

5. À quelle condition sur x, les ondes interfèrent-elles de manière constructive ? On définit l'interfrange i comme la distance séparant deux franges d'interférence, c'est-à-dire deux points d'éclairement maximal. Donner l'expression de i.
6. Trouver les coordonnées des points en lesquels il y a interférence destructive.

Fin Février



On se propose d'utiliser le système masse-ressort pour effectuer des mesures de masses en apesanteur. On se place dans le cas de deux ressorts identiques (de raideur k et de longueur à vide l_0) écartés d'une distance h supérieure à la somme des longueurs à vide ($h > 2l_0$) On écarte la masse d'une distance a par rapport à sa position d'équilibre et on note X l'écart à la position d'équilibre. L'équation du mouvement est :

$$X(t) = a\cos(\Omega t) \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{2k}{m+\delta m}}$$

1. On appelle f_0 la fréquence de vibration en l'absence de masse supplémentaire et $f(\delta m)$ la fréquence lorsque l'on ajoute une masse δm. Montrez que l'on peut écrire :

$$f(\delta m) = f_0\left(1+\frac{\delta m}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

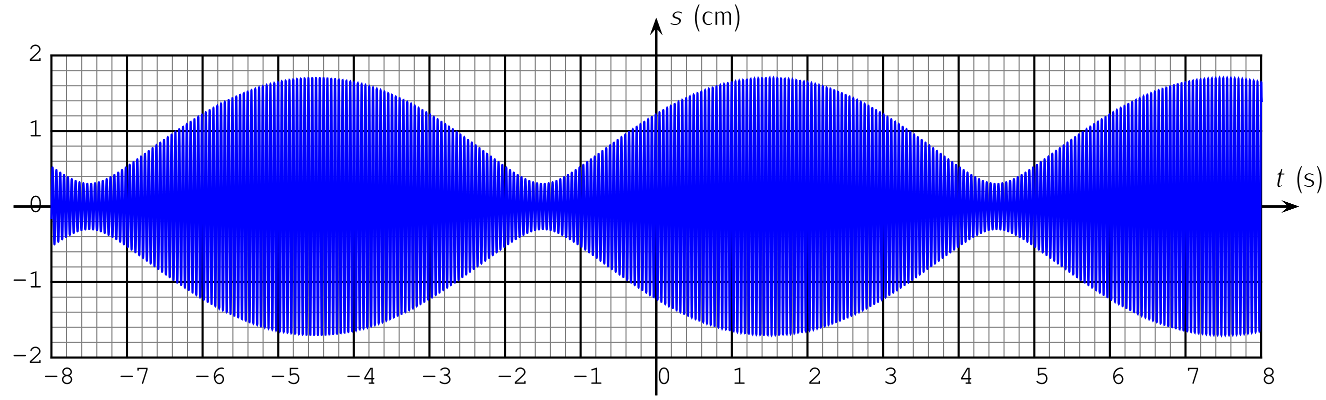
Q1

2. Pour ϵ suffisamment petit devant 1, on peut écrire $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\epsilon$. En utilisant cette formule et la relation établie à la question précédente, exprimez simplement la grandeur $\Delta f = f_0 - f(\delta m)$ en fonction de f_0, m et
Q2 δm.

Q3 3. En déduire une expression de δm en fonction de Δf, f_0 et m.

La masse ajoutée étant ici très faible, la fréquence obtenue est proche de la fréquence initiale. Pour améliorer la précision de la mesure, on propose le protocole suivant :
— on réalise une mesure de référence sans ajout de masse, on obtient le signal $X_{ref}(t)$,
— on réalise une mesure avec l'ajout de la masse δm, on obtient le signal $X_{mes}(t)$
— on effectue la somme des deux signaux : $s(t) = X_{ref}(t) + X_{mes}(t)$.

Le signal $s(t)$ est représenté sur la figure ci-dessous.



Q4 4. Quel phénomène observe-t-on ? Pourquoi ?

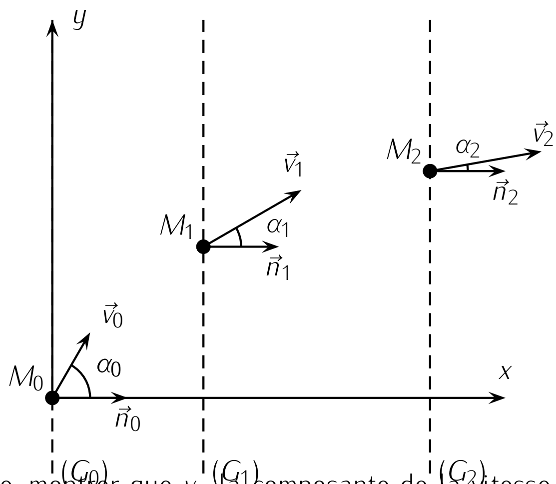
Q5 5. Représenter les spectres de X_{ref}, X_{mes} et s.

Q6 6. À partir de l'enregistrement, mesurer Δf.

Q7 7. En déduire la valeur numérique de la masse δm sachant que $f_0 = 20$ Hz et $m = 60$ g.

8. Pour réaliser ces mesures de masse, on se place dans le cas où $h > 2l_0$, expliquez sans calculs l'intérêt de cette configuration (par opposition au cas où $h < 2l_0$. On pourra envisager une légère perturbation selon
Q8 la direction x.

Mars



(G_0), (G_1) et (G_2) sont trois grilles verticales portées aux potentiels respectifs U_0, U_1 et U_2 tels que $U_0 = 0$ V et $U_2 > U_1 > 0$ pour le moment.
Par analogie avec un condensateur plan, on admettra qu'il apparaît entre deux grilles, un champ électrostatique uniforme normal aux grilles.
À l'instant initial, un électron (de masse m et de charge $q = -e$) traverse (G_0) en M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$.
On note $\vec{n}_0$ le vecteur unitaire de la normale à (G_0) en M_0 et α_0 l'angle $(\vec{n}_0,\vec{v}_0)$.
Puis l'électron traverse successivement (G_1) en M_1 avec $\alpha_1 = (\vec{n}_1,\vec{v}_1)$ et (G_2) en M_2 avec $\alpha_2 = (\vec{n}_2,\vec{v}_2)$.

1. Par application du principe fondamental de la dynamique, montrer que v_y la composante de la vitesse de l'électron sur l'axe (M_0,y) se conserve au cours du temps.
2. Par application du théorème de l'énergie cinétique, déduire l'expression de α_1 en fonction de e, m, v_0, α_0 et U_1.
3. On suppose la vitesse v_0 négligeable par rapport à v_1. Quelle est la relation entre α_1, α_2, U_1 et U_2 ? Voyez-vous une analogie ?
4. Étudier le cas où $U_2 = U_1 \sin^2 \alpha_1$. Que se passe-t-il si $U_2 < U_1 \sin^2 \alpha_1$ (cette fois, $U_2 < U_1$). Commenter.

Avril

Remarque : Bien qu'il soit conseillé de traiter le problème dans l'ordre, les dernières questions de la partie C peuvent en grande partie être traitées même si le reste du problème n'a pas été abordé en admettant l'expression de la force proposée par l'énoncé.

Dans ce problème, on étudie un moyen « gratuit » (en carburant) de propulsion spatiale : l'utilisation de la pression de radiation lors de la réflexion de la lumière sur un miroir. Il s'agit d'utiliser la force créée lors de la réflexion des photons sur un miroir afin de mettre en mouvement des objets.
On notera S la surface de la « voile solaire » considérée. Elle est supposée parfaitement réfléchissante, c'est-à-dire que la voile solaire est un miroir parfait.
Dans une première partie, on étudiera le cas où la voile est immobile dans un référentiel galiléen et où la lumière est en incidence normale. Dans la deuxième partie on étudiera le cas où l'angle d'incidence est non nul. Finalement dans la troisième partie, on tiendra compte du mouvement du miroir.
On notera λ la longueur d'onde de la lumière incidente et ν sa fréquence.
$h =$ représente la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Données numériques :

grandeur	symbole	valeur
flux solaire au niveau de l'orbite terrestre	Φ	$1{,}3608\,\mathrm{kW/m^2}$
constante gravitationnelle	$\mathcal{G}$	$6{,}67384 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^2{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
masse du soleil	M_S	$1{,}9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
distance moyenne Terre-soleil	d_{TS}	$1\ \mathrm{u.a.} = 149{,}60 \times 10^{9}\,\mathrm{m}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$

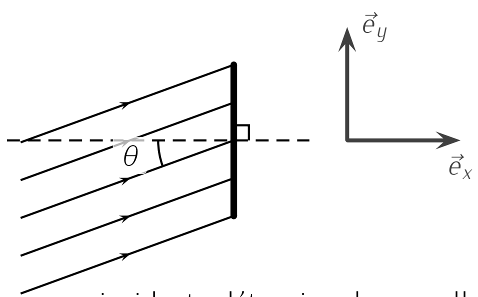
0.1 Cas de l'incidence normale

Dans cette partie, on considère que la lumière arrive sur le miroir en incidence normale, c'est-à-dire que la surface du miroir est orthogonale à la direction de propagation. Le miroir étant immobile dans le référentiel de l'étoile considéré comme galiléen, on ne considère pas de changement de longueur d'onde lors de la réflexion.
On notera $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire dirigée selon la lumière incidente.

1. Rappeler les relations de Planck-Einstein pour un photon (impulsion $\vec{p}$ et énergie E_0 d'un photon).
2. Le flux solaire Φ est la puissance surfacique provenant du soleil lorsque la surface considérée est orthogonale à la direction de propagation de la lumière. En déduire la puissance P arrivant sur le miroir, puis l'énergie correspondant pendant un court intervalle de temps dt.
3. Compte tenu des questions précédentes, déterminer le nombre de photons δN frappant le miroir entre t et $t + \mathrm{d}t$.
4. On considère le système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$}. Calculer la variation de quantité de mouvement du système entre t et $t + \mathrm{d}t$: $\vec{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \vec{\mathcal{P}}(t)$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$\vec{\mathcal{P}}(t + \mathrm{d}t) - \vec{\mathcal{P}}(t) = -2\frac{\Phi S \mathrm{d}t}{c}\vec{e}_x$$
5. En déduire la force exercée par le miroir sur le système, puis celle exercée par les photons sur le miroir.
6. Exprimer alors la pression correspondante p_r, appelée pression de radiation, en fonction de Φ et de c.
7. Vérifier explicitement l'homogénéité du résultat obtenu à la question précédente.
8. Application numérique : au niveau de l'orbite terrestre, on considère une voile de surface $S = 100{,}0\,\mathrm{m^2}$. Calculer la force due à la pression de radiation. Comparer avec la force exercée par le soleil sur un objet de $20{,}00\,\mathrm{kg}$ (toujours au niveau de l'orbite terrestre). Commenter [1].
9. Peut-on utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil ?

0.2 Cas de l'incidence oblique

On étudie maintenant le cas où la lumière incidente fait un angle θ avec la normale au miroir. Compte tenu de la distance au soleil et des angles mis en jeu, on considèrera que la lumière arrive sur le miroir sous la forme d'un faisceau de rayons parallèles.



1. Le flux solaire Φ étant défini par rapport à une surface normale aux rayons incidents, déterminer la nouvelle puissance arrivant sur la voile solaire $P(\theta)$ en fonction de θ, S et Φ (un schéma indiquant clairement les surfaces en jeu est vivement recommandé). En déduire l'énergie δE arrivant pendant un intervalle de temps dt.

1. Remarque : le flux solaire décroit en $1/r^2$ à cause de la conservation de l'énergie, la force gravitationnelle est elle aussi en $1/r^2$, donc le rapport entre ces deux forces est en fait indépendant de la distance au soleil.

2. Étudier la variation de quantité de mouvement $\overrightarrow{p_0}(t+\mathrm{d}t)-\overrightarrow{p_0}(t)$ pour un seul photon lors du choc. On exprimera le résultat en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. En déduire la variation de quantité de mouvement du système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+\mathrm{d}t$} : $\overrightarrow{\mathcal{P}}(t+\mathrm{d}t)-\overrightarrow{\mathcal{P}}(t)$.
3. Montrer que la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $p_r = 2\frac{\Phi}{c}\cos^2\theta$.

0.3 Prise en compte du mouvement de la voile

Intuitivement, on peut se douter que si la fréquence de la lumière ne varie pas lors de la réflexion, alors l'énergie mécanique totale du système { photons + miroir } pourrait augmenter sans raison. Dans cette question, on souhaite modéliser plus précisément la force lorsque le miroir est en mouvement. Toutefois, pour plus de simplicité et pour ne pas avoir à considérer des effets relativistes, le raisonnement sera mené sur un cas classique où les photons seront remplacés par des balles de tennis.

Pierrot souhaite vous faire étudier un nouveau mode de propulsion pour sa voiture de masse M : il projette des balles de tennis de masse m_t contre sa voiture à une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e}_x$. On négligera les mouvements selon les autres directions que $\vec{e}_x$, en particulier on ne tiendra pas compte de la gravité.

On notera n^* le nombre de balle de tennis par unité de volume, supposé constant et connu. On notera $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x = \dot{x}\vec{e}_x$ la vitesse de la voiture. On notera S la surface (verticale) de la voiture contre laquelle cogne les balles de tennis.

On travaillera parfois dans le référentiel terrestre (galiléen), noté $\mathcal{R}_T$, et parfois dans le référentiel lié à la voiture et en translation par rapport à $\mathcal{R}_T$, noté $\mathcal{R}_V$ (non galiléen a priori). Les vitesses précédemment définies le sont par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$.

On donne la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$$

Ainsi pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_T$, il faut ajouter $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_V$ et réciproquement, pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à $\mathcal{R}_V$, il faut soustraire $\vec{v}$ à la vitesse de cet objet par rapport à $\mathcal{R}_T$.

1. Intuitivement, quelle est la vitesse maximale v_m à laquelle Pierrot pourra amener sa voiture ? Justifier brièvement.

   Dans les questions suivantes, on fera l'hypothèse que $v_x \leq v_m$.
2. On se place dans le référentiel lié à la voiture $\mathcal{R}_V$, quelle est la vitesse $\vec{v}_0' = v_0'\vec{e}_x$ des balles de tennis dans ce référentiel ?
3. En déduire le nombre de balles de tennis frappant la voiture entre t et $t+\mathrm{d}t$ en fonction de v_0', puis en fonction de v_0 et v_x.
4. On considère que les balles rebondissent en repartant à la vitesse $-v_0'\vec{e}_x$ dans le référentiel de la voiture (ce qui revient à supposer que la masse de la voiture est bien supérieure à celle d'une balle de tennis). En
Q9 déduire que la vitesse $\vec{v}_0'' = v_0''\vec{e}_x$ des balles après leur rebond, dans le référentiel terrestre en vaut

$$\vec{v}_0'' = 2\vec{v} - \vec{v}_0$$

5. En utilisant les questions précédentes, déterminer la variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre entre t et $t+\mathrm{d}t$ du système fermé $\mathcal{S} = \{$les balles qui vont frapper la voiture entre t et $t+\mathrm{d}t\}$.
6. Montrer alors que la force exercée **par** les balles de tennis **sur la voiture** s'exprime

$$\vec{F}_{t\to v} = 2n^*Sm_t(v_0 - v_x)^2\vec{e}_x$$

7. Vérifier l'homogénéité de la formule précédente.
8. En déduire l'équation du mouvement sur v_x vérifiée par la voiture de masse M.

9. L'équation précédente étant non linéaire, une résolution analytique n'est pas facile. Pour obtenir des informations sur les solutions, tracer le portrait de phase ($\dot{v}_x$ en fonction de v_x) correspondant sans oublier de l'orienter.
10. À l'aide du portrait de phase, et en justifiant votre réponse, conclure quant à l'existence d'une vitesse limite que l'on précisera. Comparer avec votre intuition au début de la partie. (Remarque : attention, il se peut qu'une partie de la courbe que vous avez tracé à la question précédente ne soit pas pertinente compte tenu de l'hypothèse $v_x \leq v_m$).