Analyse - Chapitre 11

Intégration

I Construction de l'intégrale :

1) Intégration des fonctions en escalier :

a) Subdivision d'un segment

Définition :

On appelle **subdivision** d'un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ toute suite finie $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

Autrement dit : σ est strictement croissante, $a = a_0$ et $b = a_n$.

Exemple : subdivision régulière

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Alors $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision :

On dit que c'est une subdivision régulière, dont le **pas**, c'est à dire la différence entre deux termes consécutifs, est constant et égale à $\dfrac{b-a}{n}$.

b) Fonctions en escalier

Définition :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est en escalier si il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$.
On dit alors que la subdivision est **adaptée** à f.

Remarques :

1. Les valeurs aux points de la subdivision peuvent être quelconque.
2. Une fonction en escalier est bornée car elle prend un nombre fini de valeur.
3. Plusieurs subdivisions peuvent être adaptées à f.

Notation

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$.

c) Intégrale d'une fonction en escalier

Définition :

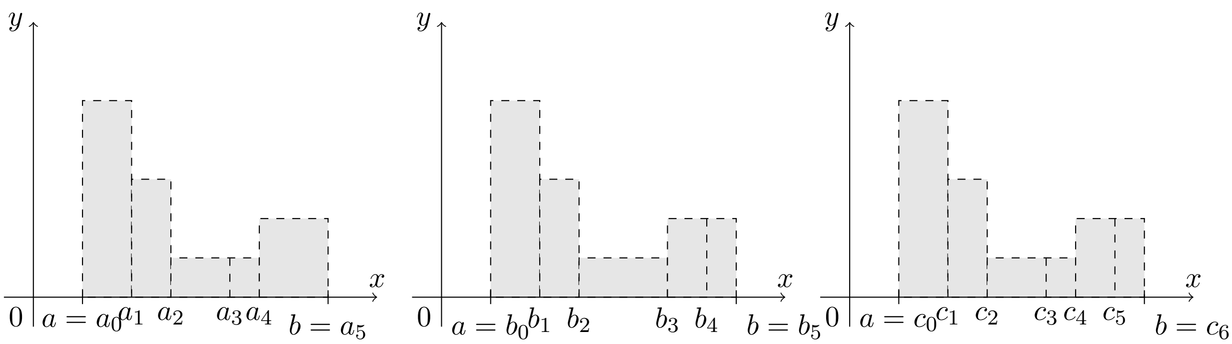
Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\sigma = (a_i)$ une subdivision adaptée.
On note f_i la valeur de la fonction sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.
Alors la quantité

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f_i$$

ne dépend pas de la subdivision σ est appelée **intégrale** de f sur $[a, b]$.

Elle est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Le fait que cette somme ne dépendent pas de la subdivision n'est pas très difficile à montrer, mais est assez lourd en terme d'écriture.
L'idée repose sur le principe suivant : si $\sigma_1 = (a_i)$ et $\sigma_2 = (b_i)$ sont deux subdivisions adaptées à f, en posant $\sigma_3 = (c_i)$ la subdivision associée à l'union de ces deux subdivisions, on montre que la somme est la même pour les trois.
C'est le dessin ci dessous :



D'après la définition, on a immédiatement la propriété :

Propriété 1 : Positivité de l'intégrale

Si $f \in \mathcal{E}([a, b])$ est positive, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.

Propriété 2 : Linearité de l'intégrale
Soient f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors

$$\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 3 : relation de Chasles
Soit $f \in \mathcal{E}[a,b]$ et $c \in [a,b]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 4 : inégalité triangulaire
Soit $f \in \mathcal{E}([a,b])$. Alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

▷ *Preuve* :

◁

2) Intégration des fonctions continues sur un intervalle

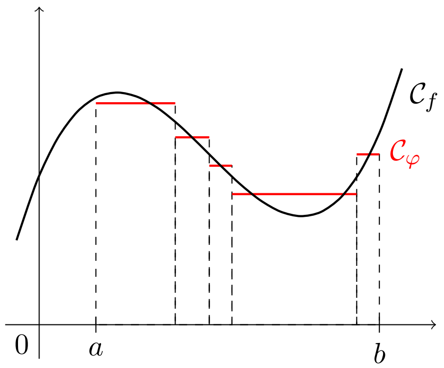
a) Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Theorème 1 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que

$$\forall t \in [a; b], |f(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

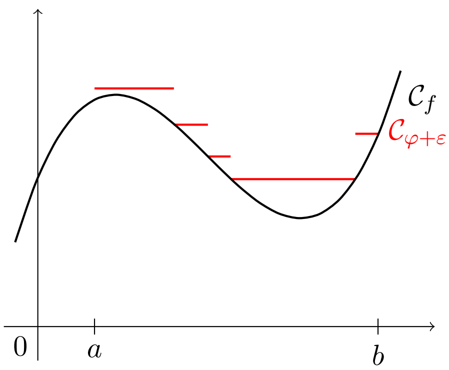
▷ *Preuve* : On admet. Mais l'idée est dans le dessin ci dessous :

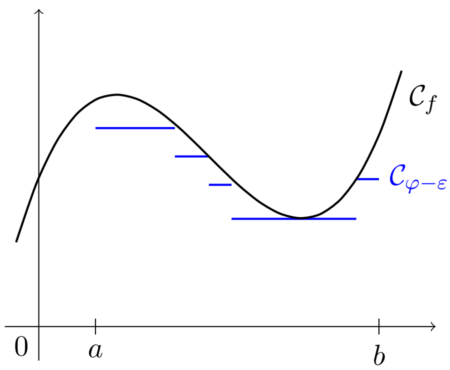


◁

b) Intégrale

Le dessin précédent montre une fonction en escalier "proche" de f, mais on peut se débrouiller pour que cette fonction soit au dessus ou en dessous de f, en lui ajoutant ou retirant ε :





On peut donc enoncer la propriété/définition ci dessous :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors les quantités suivantes sont égales :

$$inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)\ dt\ ; \varphi \text{ fonction en escalier sur } [a, b] \text{ et } \varphi \geq f \right\}$$

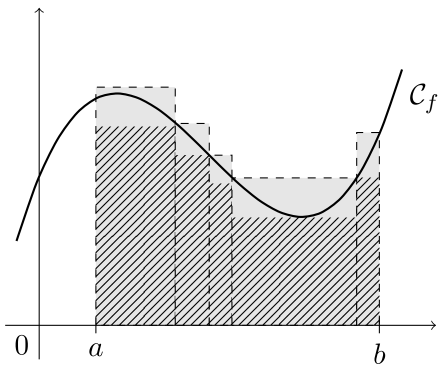
$$\text{et } sup \left\{ \int_a^b \psi(t)\ dt\ ; \psi \text{ fonction en escalier sur } [a, b] \text{ et } \psi \leq f \right\}$$

On appelle alors **intégrale de** f **sur** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)\ dt, \int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$ cette valeur.

On admet le fait que les deux quantités sont égales, mais cela provient assez intuitivement du théorème 1.

c) Interprétation :

Le fait d'encadrer de la sorte f par des fonctions en escaliers dont on calcule les intégrales revient, si f est positive, à calculer l'aire sous la courbe de f :



Si f est négative, on obtient l'opposé de l'aire sous la courbe. On parle alors **d'aire algébrique**. Par analogie avec la moyenne d'une liste de nombres, on définit également la valeur moyenne de la fonction :

Définition :

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On appelle **valeur moyenne** de f le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

3) Propriétés :

a) Popriétés communes avec les fonctions en escalier

Propriété 5 : Positivité de l'intégrale

Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.

▷ *Preuve* :

◁

Propriété 6 : Linearité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Alors

$$\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

▷ *Preuve* :

◁

Corolaire 1 : Croissance de l'intégrale

Soient $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$. Alors

$$\int_{[a,b]} f(t)dt \leq \int_{[a,b]} g(t)dt$$

▷ *Preuve :*

Il suffit de dire que si $f(t) \leq g(t)$, alors $g - f$ est positive, donc $\displaystyle\int g - f \geq 0$ et par linéarité on retrouve sur $\displaystyle\int f \leq \int g$ ◁

Toujours en passant par les propriétés dans les fonctions en escalier et en passant à l'inf ou au sup, on montre les propriétés ci dessous :

Propriété 7 : inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Propriété 8 : relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}[a,b]$ et $c \in [a,b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

A noter : **ET SI $b \leq a$?**

Toute la théorie est bâtie sur l'idée qu'on travaille sur un intervalle $[a,b]$, mais si $b \leq a$, ceci n'a plus de sens.
On définit alors

Définition :

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I)$. Soient $a, b \in I$.

Si $b < a$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ par $\displaystyle\int_a^b f(t) = -\int_{[b,a]} f$.

Si $a = b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$

Ceci permet alors de généraliser la relation de Chasles, sans imposer $c \in [a,b]$:

Propriété 9 : relation de Chasles

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I)$. Soient $a, b, c \in I$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

b) Continuité et positivité

On sait déjà que si f est positive sur $[a,b]$, alors l'intégrale est positive. Mais si en plus f est continue, on a le résultat ci dessous :

Proposition 1 :

Soit f continue et **positive** sur $[a,b]$. Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a,b]$.

▷ *Preuve* :

◁

II Calcul d'intégrales

1) Lien avec la dérivation

a) Théorème fondamental du calcul intégral :

Theorème 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Alors la fonction F définie pour tout $c \in I$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur I et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a (i.e. $F(a) = 0$).

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Ce théorème entraine immédiatement le corolaire suivant :

Corolaire 2 :

Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ admet des primitives.

Corolaire 3 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b dans I.
Soit F une primitive de f sur I.
Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \underset{notation}{=} [F(t)]_a^b$$

▷ *Preuve* : On applique directement le résultat précédent : on sait que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est en fait une primitive de f sur $[a, b]$, et $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

Comme $F(a) = 0$, on a bien $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
Il faut maintenant montrer que cela ne dépend pas du choix de la primitive :
En effet, soit G une autre primitive de f, alors $\exists C$ tel que $G(x) = F(x) + C$.
On a $G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$. On peut donc prendre n'importe quelle primitive pour calculer l'intégrale.

◁

b) IPP et changement de variable :

On rappelle les deux résultats ci dessous, conséquences de ce lien primitive/intégrale. Cf. le chapitre AN6 : Primitives.

Theorème 3 : Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soit $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

En abrégé : $\displaystyle\int uv' = [uv] - \int u'v$

Theorème 4 : Changement de variable

Soit f continue sur un intervalle I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J tel que $\varphi(J) \subset I$.
Alors pour tout $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable "$u = \varphi(x)$".

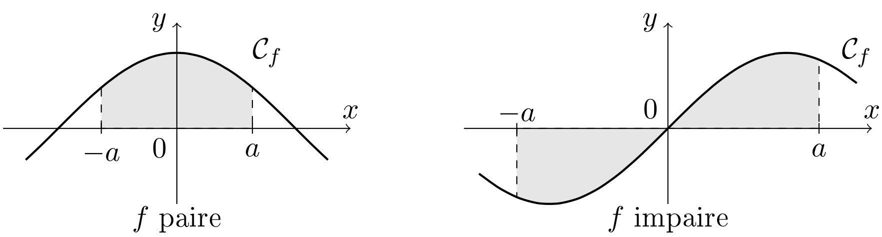
c) Parité, périodicité et intégrales

Propriété 10 :
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

- Si f est paire sur $[-a, a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\ dt$.
- Si f est impaire sur $[-a, a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$.

▷ *Preuve* :

◁



Propriété 11 :
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$.
Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{0}^{T} f(t)\ dt = \int_{a}^{T+a} f(t)\ dt$$

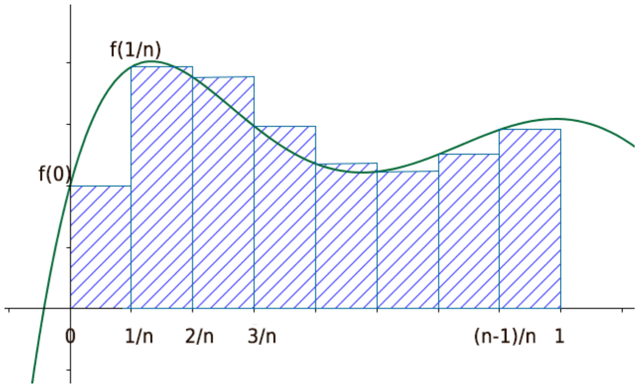
▷ *Preuve* :

◁

2) Sommes de Riemann

a) Principe :

On effectue une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. On approche alors l'intégrale avec l'aire des rectangles dont la hauteur est l'image de la borne gauche de l'intervalle de subdivision. Ainsi, le premier rectangle est de hauteur $f(a)$, le deuxième $f(a + \dfrac{b-a}{n})$, et ainsi de suite. Tous sont de largeur $\dfrac{b-a}{n}$.
Par exemple, si $a = 0$ et $b = 1$:



Aire totale des rectangles :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Pour n grand, les rectangles sont de plus en plus fins et cette aire est proche de la valeur de l'intégrale.

Définition :

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann** d'ordre n associée à f la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque :
La somme de Riemann associée à f est une fonction en escalier qui approche f. Elle n'est pas forcément en dessous, ni au dessus de f, mais on devine qu'elle approche "naturellement" l'intégrale.

b) Convergence des sommes de Riemann :

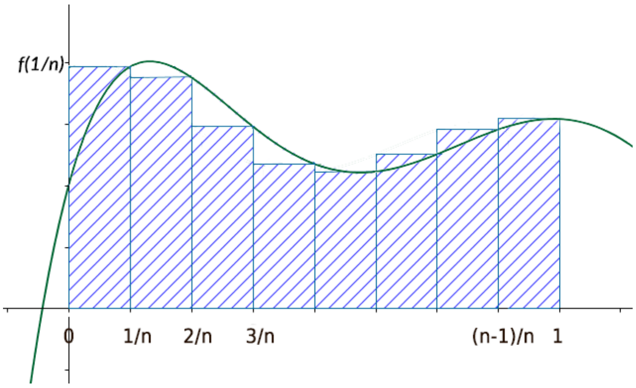
Theorème 5 : Théorème de convergence des sommes de Riemann
Soit f continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

▷ *Preuve* :

$\triangleleft$

Remarque :
On aurait très bien pu prendre comme approximation des rectangles dits "à droite" :



Aire totale des rectangles :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

La formule obtenue est très proche, et il est alors facile de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

c) En pratique :

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est très pratique pour calculer certaines sommes, et s'utilise fréquemment en se ramenant à l'intervalle $[0, 1]$ où le théorème est plus simple à retenir :

Corolaire 4 :

Soit f continue sur $[0, 1]$.
Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

Exemple :

soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

3) Inégalité de Taylor Lagrange

Theorème 6 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a telle que pour tout $x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \end{aligned}$$

avec $|R_n(x)| \leq \dfrac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

▷ *Preuve* : On utilise le lemme ci dessous :

Lemme 1 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit n un entier naturel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a. Alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt. \end{aligned}$$

▷ *Preuve* : Cette formule se démontre assez bien par récurrence, un peu comme on l'a déjà fait pour les développements limités et Taylor Young.
Conformément au programme, on l'admet, mais elle n'est pas très difficile. ◁

◁

Remarques

- On verra des applications à ce théorème dans le prochain chapitre sur les séries.
- Il est important de voir que, contrairement à Taylor Young qui donne un résultat local, au voisinage du point, ce théorème donne une majoration de l'erreur commune, en n'importe quel point de l'ensemble de définition de la fonction. C'est un résultat "global".

III Cas des fonctions à valeurs complexes

1) Définition :

Définition : (rappel)

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, de partie réelle $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et de partie imaginaire $\beta : I \to \mathbb{R}$ toutes deux continues sur I.

Pour tout $a, b \in IR$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \alpha(t)\ dt + i\int_a^b \beta(t)\ dt$$

2) Propriétés communes

Les propriétés suivantes sont naturellement prolongées aux fonctions à valeurs complexes :

- Linéarité de l'intégrale.
- Relation de Chasles
- convergence des sommes de Riemann

En revanche, la positivité et la croissance de l'intégrale n'ont pas de sens.

3) Module et intégrale

a) Inégalité triangulaire

En remplaçant "valeur absolue" par "module", on retrouve :

Propriété 12 : inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$. Alors

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

b) Taylor-Lagrange

De même, on montre de la même manière que :

Theorème 7 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a telle que pour tout $x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \text{avec} |R_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

c) Inégalité des accroissements finis

Enfin, on a vu que le théorème des accroissements finis était faux pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais que l'inégalité étaient valable :

Proposition 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$. Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

▷ *Preuve* :

◁