Planches INP (1)

► 1 Planche INP A

■ Exercice majeur

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose

$$f^0 = \mathrm{id}_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ f^k = f \circ f^{k-1}.$$

On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que

$$\big(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1)\big) \text{ est une base de } E.$$

1) **On suppose ici que $n = 3$.** On note $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- **a.** Déterminer $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f^2)$.
- **b.** En déduire que f est cyclique.

2) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que :

$$f : \ P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

- **a.** Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geqslant 1$.
  Montrer que : $\deg\big(f(Q)\big) = \deg(Q) - 1$.
  En déduire que f n'est pas bijectif.
- **b.** f est-il cyclique ?
  Indication : *calculer* $\deg\big(f^j(X^{n-1})\big)$.

3) On suppose ici que $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que $\mathrm{Ker}(f^n) = E$.

- **a.** Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
- **b.** Montrer que f est cyclique.

4) On suppose ici f cyclique.
Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

5) On suppose ici f diagonalisable.
Montrer que f est cyclique *si et seulement si* ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

■ Exercice mineur

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathscr{P}(a) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathscr{P}(b).$$

1) Déterminer la loi de $X+Y$ de deux manières différentes.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnellement à $[X+Y=n]$.

3) On suppose que $c > 0$ et $p \in [0,1]$ sont deux constantes, X et Z deux variables aléatoires telles que $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(c)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[Z = n]$, X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Montrer que X et $Z - X$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois.

► 2 Planche INP B

■ Exercice majeur

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\alpha^n}{n!}\cos(nx) \text{ puis } U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

1) Donner le DSE de exp et son rayon de convergence.

2) Montrer que $U(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Montrer que U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que : (sans calculer U)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \exp\big(\alpha\cos(x)\big)\cos\big(\alpha\sin(x)\big).$$

On pose : $V(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

5) Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.

On pose : $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,U(x)\,\mathrm{d}x$.

6) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

7) Calculer I_n.

■ Exercice mineur

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, A la matrice de E définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On pose $\varphi_A : \ E \to E, \ M \mapsto AM - MA$.

1) Déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A.

2) Généraliser ces résultats au cas où A est une matrice diagonalisable d'ordre 2.

3) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

► 3 Planche INP C

■ Exercice majeur

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, stable par produit.
Donner la dimension de F.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1, ne contenant pas I_n et stable par produit.

a. Rappeler la valeur de $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$, avec $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$.
On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j), qui vaut 1.

b. Montrer que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

3) **a.** Soit $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ parallèlement à F.
Montrer que : $p(M\,M') = p(M)\,p(M')$.

b. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $M^2 \in F$, alors $M \in F$.

4) Déduire des questions précédentes que $E_{i,j} \in F$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, puis conclure.

5) Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1.
Est-il stable par produit ?

■ Exercice mineur

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad \cos(t)\,y + \sin(t)\,y' = -\cos(t)\,\sin(t).$$

Déterminer l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.