SUITES ET SÉRIES

Épreuves orales - Sujet fait en classe

Sujet type CCINP :

Exercice 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cos(nx)$ et $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le développement en série entière de exp et son rayon de convergence.
2. Montrer que la fonction U est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (sans calculer U).
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$U(x) = \exp(\alpha\cos(x))\cos(\alpha\sin(x)).$$
5. On pose $V(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.
Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.
6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)U(x)\mathrm{d}x$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
7. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien et $(a,b) \in E^2$ une famille libre de vecteurs unitaires.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle x,a\rangle b + \langle x,b\rangle a. \end{array}$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\varphi$.
4. Évaluer $\varphi(a+b)$ et $\varphi(a-b)$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?