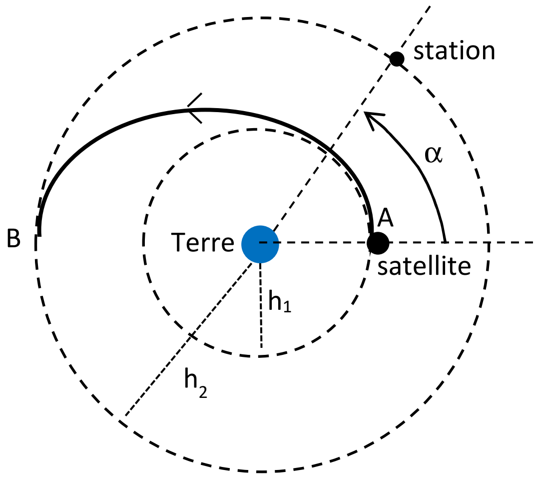
2.6 Forces centrales-Exercice 5

Pour rejoindre une station spatiale, un satellite passe d'une orbite circulaire d'altitude h_1 à une orbite circulaire d'altitude h_2 par l'intermédiaire d'une orbite de transfert elliptique.

On donne :
- Rayon terrestre : $R_T = 6{,}4.10^6$ m
- Masse de la Terre : $M_T = 6.10^{24}$ kg
- Masse du satellite : $m = 2.10^3$ kg
- $h_1 = 3.10^5$ m
- $h_2 = 4.10^5$ m
- $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I



1-Rappeler l'expression de la force gravitationnelle entre deux masses.

2-Montrer que la vitesse est constante pour un mouvement circulaire et confronter ce résultat à la deuxième loi de Kepler.

3-Déterminer la vitesse angulaire, la vitesse, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, l'énergie mécanique pour le satellite en orbite circulaire à une altitude h.

4-Le satellite passe de l'orbite circulaire d'altitude h_1 à l'orbite circulaire d'altitude h_2. Déterminer la variation de vitesse Δv et la variation d'énergie W lors du transfert.

5-Déterminer le temps mis pour passer de l'orbite circulaire d'altitude h_1 à l'orbite circulaire d'altitude h_2. Quel doit être l'angle α si l'on veut que le satellite et la station se rejoignent en B ?

1- $\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}}$

2-Référentiel géocentrique supposé galiléen.

Loi de la quantité de mouvement au satellite, selon $\vec{u}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = 0$ D'où : $\dot{\theta} = constante$

On a : $v = R\dot{\theta}$. <u>La vitesse est donc constante</u>.

Ceci est conforme à la deuxième loi de Kepler : pendant des durées égales, le rayon vecteur du satellite balaie des aires égales.

3-Loi de la quantité de mouvement au satellite, selon $\vec{u}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$

d'où $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)^3}}\ ;\quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}\ ;\quad E_c = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{(R_T+h)}\ ;\quad E_p = -\frac{GmM_T}{R_T+h}\ ;\quad E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{(R_T+h)}}$

4-$\Delta v = \sqrt{GM_T}\left(\frac{1}{R_T+h_2} - \frac{1}{R_T+h_1}\right)$; $W = \Delta E_m = -\frac{1}{2}GmM_T\left(\frac{1}{R_T+h_2} - \frac{1}{R_T+h_1}\right)$

5-Troisième loi de Kepler pour la trajectoire elliptique de demi-grand axe a : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Avec a tel que $2a = 2R_T + h_1 + h_2$, la durée du transfert est : $\boxed{\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}}$

La station doit parcourir l'arc de cercle $(\pi - \alpha)(R_T + h_2)$ à la vitesse $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h_2}}$ pendant la durée τ, donc :

$(\pi - \alpha)\frac{(R_T+h_2)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$ d'où : $\boxed{\alpha = \pi\left[1 - \left(\frac{a}{R_T+h_2}\right)^{3/2}\right]}$
