DM 7 - Variables aléatoires - corrigé

Exercice 1

Un fabricant d'oeufs de Pâques en chocolat dispose de deux machines pour confectionner des oeufs fourrés pralinés. La machine A réalise les trois quarts de la production et la machine B un quart.
Certains oeufs sont défectueux : ils sont vides...
La probabilité que la machine A (resp. B) produise un oeuf défectueux est $0,1$ (resp. $0,2$).

1. Première situation : les oeufs en provenance des deux machines sont mélangés **avant** d'être conditionnés dans des boîtes de n oeufs.
   a) On prend un oeuf au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit vide ?
   b) Soit X la v.a. donnant le nombre d'oeufs vides dans une boîte. Déterminez sa loi et son espérance.
2. Deuxième situation : chaque machine conditionne elle-même les oeufs qu'elle fabrique dans des boîtes de n oeufs ($n \geq 2$, le même n pour les deux machines).
   a) On prend une boite provenant de la machine A. Quelle est la loi du nombre d'oeufs vides dans cette boite ? Même question pour une boite provenant de la machine B.
   b) Toutes les boîtes sont maintenant mélangées et entreposées ensemble (peu importe la machine dont elles proviennent). On prend au hasard une boîte. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'oeufs vides dans celle-ci. Déterminez la loi de Y et son espérance.
   c) On a pris une boite au hasard, et aucun oeuf n'était vide : quelle est la probabilité (en fonction de n) que la boîte provienne de la machine A ?

---

1. a) Soit A (resp B) l'événement “l'oeuf a été confectionné par la machine A” resp. (B).
   Soit V l'événement “l'oeuf est vide”.
   D'après l'énoncé, $P(A) = \dfrac{3}{4}$ et $P(B) = \dfrac{1}{4}$
   De plus $P_A(V) = \dfrac{1}{10}$ et $P_B(V) = \dfrac{2}{10}$
   A et B constituent un système complet d'événements et donc, d'après la formule des probabilités totales :
   $$P(V) = P(A)P_A(V) + P(B)P_B(V) = \frac{3}{4}\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\frac{2}{10} = \frac{1}{8}$$
   b) On peut voir le remplissage d'une boite comme la répétition de n expériences de type succès/échec (où le “succès” est “avoir un oeuf vide”) de manière indépendante dans les mêmes conditions (les oeufs sont mélangés avant la mise en boite) . On obtient donc une binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{8}$, d'où
   $$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{8}) \text{ et } E(X) = \frac{n}{8}}$$
2. a) Si on prend une boite de la machine A, chaque oeuf a une probabilité de 0.1 d'être vide. Ainsi, dans une boîte de la machine A, on a une répétition de n succès/échec, indépendants. Et donc, sachant qu'on est dans la machine A, $X \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{1}{10})$.
   De même, sachant qu'on est dans la machine B, $X \sim \mathcal{B}(n, \dfrac{2}{10})$.
   b) On a $Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$
   Notons C_A (respectivement C_B) l'événement “la boite a été conditionnée par A” (respectivement par B)
   On obtient la loi de Y via la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $\{C_A, C_B\}$:
   $$\forall k \in [\![0, n]\!], P(Y = k) = P(C_A)P_{C_A}(Y = k) + P(C_B)P_{C_B}(Y = k)$$
   d'où
   $$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], P(Y = k) = \frac{3}{4}\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} + \frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^k\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}}$$
   Pour calculer $E(Y)$, on ne refait surtout pas tout le calcul effectué pour la loi binomiale : on fait apparaitre une formule nous permettant de reconnaître des espérances de loi binomiale.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} + \frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^{k}\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}\right) \\
&= \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\frac{1}{10^k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}}_{\text{espérance d'une } \mathcal{B}(n,\frac{1}{10})} + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{2}{10}\right)^{k}\left(\frac{8}{10}\right)^{n-k}}_{\text{espérance d'une } \mathcal{B}(n,\frac{2}{10})} \\
&= \frac{3}{4}n\frac{1}{10} + \frac{1}{4}n\frac{2}{10} = n\frac{5}{40}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{E(Y) = \frac{n}{8}}$.... la même chose que dans la première situation !

c) Aucun oeuf n'est vide correspond à l'événement $(Y=0)$.

On cherche donc $P_{Y=0}(C_A) = \dfrac{P(C_A \cap Y=0)}{P(Y=0)}$.

Or $P(Y=0) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{8}{10}\right)^n = \dfrac{1}{4\times 10^n}(3\times 9^n + 8^n)$

et $P(C_A \cap Y=0) = P(C_A)P_{C_A}(Y=0) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n = \dfrac{1}{4\times 10^n}(3\times 9^n)$ d'où

$$\boxed{P_{Y=0}(C_A) = \frac{3\times 9^n}{3\times 9^n + 8^n}}$$

Exercice 2

Un couple de lions chasse des gazelles et des zèbres pour les repas de toute la famille.

En famille moderne, le lion accompagne la lionne à la chasse, et le couple est particulièrement efficace : chaque chasse se termine soit par la capture d'un zèbre, avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, soit par la capture d'une gazelle, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Le couple ne revient donc jamais bredouille, et les chasses sont supposées indépendantes.

Chaque repas de la famille est ainsi composé d'une gazelle ou d'un zèbre, et on suppose la composition d'un repas indépendante de celle des repas précédents (puisque les chasses sont indépendantes...).

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose les événements :

G_i : "Le i-ème repas est constitué d'une gazelle"
Z_i : l'événement "le $i$ème repas est constitué d'un zèbre".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe n repas de la famille.
   Soit X le nombre de fois qu'une gazelle a été consommée au cours des n repas.
   Quelle est la loi de X, son espérance et sa variance ?
2. Les lionceaux ont besoin de variété dans les repas et n'aime pas manger deux fois de suite la même chose. On s'intéresse donc maintenant à la première fois où la famille consomme deux fois de suite des gazelles (on pourrait faire de même avec les zèbres évidemment...).
   a) Soit A l'événement "les deux premiers repas sont constitués de gazelles". Déterminez $P(A)$.
   b) Calculez la probabilité de l'événement B : "le premier repas était constitué d'un zèbre, et les deux suivants de gazelles."
   c) Soit C l'événement :"au cours des 4 premiers repas, la première fois que le repas "gazelle" s'est répété est lors des 3-ème et 4-ème repas.". Calculer $P_{G_1}(C)$ et $P_{Z_1}(C)$. En deduire $P(C)$.
3. Soit Y la variable aléatoire donnant le numero du repas où, pour la première fois, la famille a mangé deux gazelles à deux repas consécutifs.
   Par exemple si la séquence de repas est $G_1Z_2Z_3G_4Z_5G_6G_7Z_8G_9Z_{10}G_{11}G_{12}$, alors $Y=7$.
   a) Que valent $P(Y=2)$, $P(Y=3)$ et $P(Y=4)$?
   b) Pour tout $n \geq 2$, justifiez "en français" que
   $$P_{Z_1}(Y=n+2) = P(Y=n+1) \text{ et } P_{G_1}(Y=n+2) = \frac{1}{3}P(Y=n)$$
   c) On pose $u_n = P(Y=n)$. A l'aide du système complet (Z_1, G_1), montrez que $\forall n \geq 2$,
   $$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   a) Déterminez les valeurs du réel λ pour lesquels $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   On notera λ_1 et λ_2 ces deux valeurs, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
   b) Pour chaque $k \in \{1,2\}$, on pose
   $$E_{\lambda_k} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (A - \lambda_k I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
   Montrez que les ensembles E_{λ_k} sont des sous espace vectoriels dont on précisera une base et la dimension.
   c) Soit $P = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez P^{-1} et $D = P^{-1}AP$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} & \left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} & \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

e) Vérifiez que pour tout $n \geq 2$, $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire $P(Y = n)$ pour tout $n \geq 2$.

5. Proposez une autre façon de calculer $P(Y = n)$ à partir de la question 3c) (et remarquez où l'on retrouve les valeurs λ_1 et λ_2).

---

1. Les repas étant supposés indépendants, il s'agit ici d'une répétition d'expériences de Bernoulli, dont on compte les succès (ici : manger une gazelle). La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale :
$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)}$$
D'après le cours, $\boxed{E(X) = \frac{2n}{3} \text{ et } V(X) = \frac{2n}{9}}$.

2. a) Avec les notations proposées, $A = G_1 \cap G_2$, et par indépendance, $P(A) = P(G_1)P(G_2) = \frac{4}{9}$.

   b) De même, $B = Z_1 \cap G_2 \cap G_3$ et, toujours via l'indépendance, $P(B) = \frac{4}{27}$.

   c) A partir de la formule, on a $P_{G_1}(C) = \frac{P(G_1 \cap C)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)}{P(G_1)} = P(Z_2 \cap G_3 \cap G_4) = \frac{4}{27}$. On peut aussi raisonner en considérant que cela revient à "décaller" l'expérience et donc à revenir à l'événement B.
   De même, $P_{Z_1}(C) = \frac{4}{27}$, et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e. (G_1, Z_1), on a
$$\boxed{P(C) = \frac{1}{3}\frac{4}{27} + \frac{2}{3}\frac{4}{27} = \frac{4}{27}}$$

3. a) Comme $(Y = 2) = A$, $(Y = 3) = B$ et $(Y = 4) = C$, on a
   $\boxed{P(Y = 2) = \frac{4}{9}, \text{ et } P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{4}{27}}$.

   b) Si on sait que Z_1 a eu lieu, tout se passe comme si on recommençait. Ainsi avoir la répétition au $n + 2$-ème repas sachant que Z_1 a eu lieu est comme avoir la répétition au $n + 1$ eme repas en partant du début, d'où $P_{Z_1}(Y = n + 2) = P(Y = n + 1)$.
   D'autre part avoir $(Y = n + 2)$ sachant G_1 implique qu'au deuxième repas on a eu un zebre, puis que n repas plus tard a eu lieu la répétition, d'où, par indépendance des événements, $P_{G_1}(Y = n + 2) = P(Z_2)P(Y = n) = \frac{1}{3}P(Y = n)$.

   c) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événement $\{G_1, Z_1\}$ et ainsi
$$P(Y = n{+}2) = P(G_1)P_{G_1}(Y = n{+}2) + P(Z_1)P_{Z_1}(Y = n{+}2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}P(Y = n) + \frac{1}{3}P(Y = n{+}1)$$
   avec les notations proposées, ceci donne
$$\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n}$$

4. a) A partir de $A-\lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$, on peut utiliser le déterminant et on a $A-\lambda I_2$ inversible si et seulement si $-\lambda(\frac{1}{3}-\lambda)-\frac{2}{9} = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{9} \neq 0$, et donc

$$\boxed{A-\lambda I_2 \text{ non inversible si et seulement si } \lambda = -\frac{1}{3} \text{ ou } \lambda = \frac{2}{3}}$$

b) Pour $\lambda = \frac{-1}{3}$,

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + y &= 0 \\ \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}y &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / u = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{E_{-\frac{1}{3}} = vect(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix})}$. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dont une base est $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (c'est une droite matricielle).

De même, $\boxed{E_{\frac{2}{3}} = vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})}$.

c) On trouve $P^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, et on obtient $D = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d) On a $A = PDP^{-1}$ et on montre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$. Comme D est diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$, et après calcul ont trouve la matrice proposée.

e) On a bien $X_{n+1} = AX_n$, et par récurrence, il vient $X_n = A^{n-2}X_2$. On calcule (on peut se contenter de la première ligne puisque c'est u_n qui nous intéresse) et on trouve

$$\boxed{u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5. (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, de polynome caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9}$ (c'est le même polynôme que celui donné par le déterminant... sûrement un hasard !), et dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ (les coefficients de la matrice D...). Ainsi, il existe A et B réels tels que $u_n = A(-\frac{1}{3})^n + B(\frac{2}{3})^n$ et on trouve $A = \frac{4}{3}$ et $B = \frac{2}{3}$ à partir de u_2 et u_3.