DM 8 - Variables aléatoires - DL

Exercice 1 (Développements limités et bijection)

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Précisez $f^{-1}(0)$.
2. Déterminez le $DL_5(0)$ de f.
3. L'objectif est de présenter une méthode, générale, pour calculer le DL_5 en 0 de f^{-1}, sans calculer pour autant f^{-1} de manière explicite.
   a) Justifiez (sans chercher à le calculer pour le moment) que f^{-1} admet aussi un développement limité d'ordre 5 en 0, de la forme
   $$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$$
   b) Justifiez qu'on peut substituer dans l'expression précédente x par $f(x)$ et en déduire un développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1}(f(x))$, en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_5$.
   c) Utiliser l'unicité du DL_5 de $f^{-1}(f(x))$ pour donner une relation entre les coefficients a_i, et en déduire l'expression du $DL_5(0)$ de f^{-1}.
4. Utiliser le même raisonnement pour donner le $DL_5(0)$ de la bijection réciproque de
   $$g : x \mapsto x\mathrm{ch}(x)$$

---

1. Par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} > 0$$
   donc f est strictement croissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
   Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que f est continue, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
   Ainsi, on a bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Comme on multiplie par x, un $DL_4(0)$ de e^{x^2} va suffire. Comme $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$, on peut substituer dans le DL de exp et on a :
   $$e^{x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
   d'où
   $$f(x) \underset{0}{=} x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$
3. a) Comme f est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ également. Par Taylor Young, elle admet un développement limité à tout ordre, et d'ordre 5 en particulier.
   De plus, comme $f(0) = 0$, on a $0 = f^{-1}(0)$ et donc le coefficient d'ordre 0 vaut 0.
   Remarquons aussi qu'on peut déjà affirmer que a_2 et a_4 valent 0, car f^{-1} est impaire :
   En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique $x \in R$ tel que $f(x) = y$ (en fait, $x = f^{-1}(y)$) et on a $f(-x) = -f(x)$, donc $-y = f(-x)$, c'est à dire $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$.
   Ainsi, f^{-1} est bien impaire.

   b) La fonction f est continue en 0, avec $f(0) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et on a donc
   $$f^{-1}(f(x)) = a_1(f(x))^2 + a_3 f(x)^3 + a_5 f(x)^5 + o(f(x)^5)$$
   soit, en substituant par le DL_5 de f :
   $$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a_1(x + x^3 + \frac{x^5}{2}) + a_3(x^3 + 3x^5) + a_5 x^5 + o(x^5) \\ &= a_1 x + (a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{2}a_1 + 3a_3 + a_5)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

   c) Comme $f^{-1}(f(x)) = x$ par unicité du DL, on en déduit que
   $$a_1 = 1, a_1 + a_3 = 0 \text{ et } a_1 + 3a_3 + a_5 = 0$$
   d'où $a_1 = 1$, $a_3 = -1$ et $a_5 = \dfrac{5}{2}$, et finalement
   $$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$$

4. Remarquons déjà que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $g'(x) = \mathrm{ch}(x) + x\,\mathrm{sh}(x)$. Si $x \geq 0$, alors $\mathrm{sh}(x) \geq 0$ et, si $x \leq 0$, $\mathrm{sh}(x) \leq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x\,\mathrm{sh}(x) \geq 0$. Comme $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, on a $g'(x) \geq \mathrm{ch}(x) > 0$ et donc g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (les limites sont immédiates).

   Enfin, g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ également, puisque bijection réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ don la dérivée ne s'annule pas.

   On procède ensuite de la même façon :
$$g(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 + o(x^5)$$
   On a $g^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$ puisque g^{-1} est impaire, comme g.

   Comme $g(x) = 0$, on peut substituer ce qui donne
$$x = a_1x + (\frac{1}{2}a_1 + a_3)x^3 + (\frac{1}{24} + \frac{3}{2}a_3 + a_5)x^5 + o(x^5)$$
   Et au final :
$$g(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{17}{24}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 2 (mini exo autour de la loi binomiale) Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur Ω qui suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et $1/2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminez la loi de $Y = X - n$. Précisez son espérance et sa variance.
2. Déterminez la loi de $Z = |X - n|$
3. On définit la variable aléatoire T par :
   - Pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) = k$ avec $k \neq 0$, alors $T(\omega) = X(\omega)$.
   - Sachant $(X = 0)$, T suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, 2n \rrbracket)$.

   Déterminez la loi de T.

---

1. Comme $X(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on obtient $Y(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$

   Alors, pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, on a
$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(X - n = k) = P(X = k + n) \\ &= \binom{2n}{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+n} \\ P(Y = k) &= \binom{2n}{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$
   On a alors $E(Y) = E(X - n) = E(X) - n = 2n\frac{1}{2} - n = 0$ et $V(Y) = V(X - n) = V(X) = 2n\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}$
2. Cette fois, on a $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

   Il y a le cas particulier où $k = 0$.

   En effet $(Z = 0) = (|X - n| = 0) = (X = n)$, donc $P(Z = 0) = P(X = n) = \binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}$

   Pour $k > 0$, on a cette fois $(Z = k) = (|X - n| = k) = (X - n = k) \cup (X - n = -k)$

   Les événements étant incompatibles, on a donc
$$P(Z = k) = P(X = n + k) + P(X = n - k) = \binom{2n}{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \binom{2n}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
   Or, $\binom{2n}{k+n} = \binom{2n}{2n-(k+n)}$ par propriété de symétrie des coefficients binomiaux. Et comme $2n - (k + n) = n - k$, on en déduit
$$P(Z = k) = 2\binom{2n}{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{k+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

3. Remarquons déjà que $T(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$.
On utilise le système complet d'événement associé à la variable X : $((X = i))_{i \in [\![0,2n]\!]}$
On a alors , pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(T = k) &= \sum_{i=0}^{2n} P(X = i)P_{X=i}(T = k) \\ &= P(X = 0)P_{(X=0)}(T = k) + \sum_{i=1}^{2n} P(X = i)P_{X=i}(T = k) \end{aligned}$$

Or, sachant $(X = 0)$, T est uniforme sur $[\![0, 2n$, donc $P_{(X=0)}(T = k) = \dfrac{1}{2n+1}$
Et quand $X(\omega) = i$ avec $i \neq 0$, $T(\omega) = X(\omega)$, autrement dit, sachant $(X = i)$ avec $i \neq 0$, $X = T$ et donc $P_{X=i}(T = k) = 0$ si $k \neq i$ et $P_{X=i}(T = i) = 1$. Il n'y a donc qu'un seul terme non nul dans la somme, et même aucun pour $k = 0$.

Conclusion : La loi de T est donnée par :
$P(T = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} \dfrac{1}{2n+1}$ et, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$,
$P(T = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} \dfrac{1}{2n+1} + \dbinom{2n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$

Exercice 3 (Des medecins et des probas)

Dans une population de r personnes ($r \in \mathbb{N}^*$), chaque individu fait appel à un médecin choisi au hasard dans une liste de n ($n \in \mathbb{N}^*$) médecins. On suppose que les choix se font tous de manière indépendante.

1. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui vont consulter le $i$ème médecin.
   a) Déterminez la loi commune à toutes les variables aléatoires X_i.
   b) Préciser leur espérance et leur variance.
   c) Ces variables sont-elles indépendantes ?
   d) Pour $i \neq j$, déterminez la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance.
   e) En déduire $cov(X_i, X_j)$.
2. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, on pose Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $(X_i = 0)$, 0 sinon. On pose $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   a) Que modélise la variable Z_n ?
   b) "Z_n est une somme de variable aléatoire de Bernoulli de même paramètre $P(X_i = 0)$. Donc Z_n est binomiale de paramètres n, p avec $p = P(X_i = 0)$." Ce raisonnement est-il valable ? Le complèter ou montrer que sa conclusion est fausse.
   c) Déterminez $E(Z_n)$.

---

1. a) Chaque personne peut faire appel ou non au medecin numero i avec une probabilité de $\dfrac{1}{n}$: c'est un comptage de succès dans la répétition de r épreuves succès/echec, de manière indépendante, et donc $\boxed{X_i \sim \mathcal{B}(r, \frac{1}{n})}$.
   b) C'est le cours : $E(X_i) = \dfrac{r}{n}$ et $V(X_i) = \dfrac{r(n-1)}{n^2}$
   c) Il n'y a pas indépendance, car deux medecins différents ne peuvent pas avoir simultanément n patients : ainsi $(X_i = n) \cap (X_j = n) = \emptyset$ alors que $P(X_i = n) \neq 0$ et $P(X_j = n) \neq 0$.
   d) C'est le même raisonnement que la question a), en regroupant les deux medecins : la probabilité d'un succès est désormais $\dfrac{2}{n}$.

$$X_i + X_j \sim \mathcal{B}(r, \frac{2}{n})$$

   Ainsi, $E(X_i + X_j) = \dfrac{2r}{n}$ et $V(X_i + X_j) = \dfrac{2r(n-2)}{n^2}$
   e) On a $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(X_i, X_j)$ On en déduit

$$cov(X_i, X_j) = \frac{1}{2}(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j) = -\frac{r}{n^2}$$

2. a) Y_i vaut 1 si le medecin numero i n'a pas été consulté : Z_n représente ainsi le nombre de medecin non consultés.

   b) Pour que ce raisonnement soit valable il faudrait qu'il y ait indépendance des X_i, ce qui n'est pas le cas. On peut totalement écarter la loi binomiale du fait que $(Z_n = n) = \emptyset$ (il ne peut y avoir aucun medecin consulté).

   c) Déterminons la loi de Y_i : c'est une variable de Bernoulli et on a $P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = (1 - \frac{1}{n})^r$.

   Ainsi $E(Y_i) = (\frac{n-1}{n})^r$ et par linéarité de l'espérance

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_i) = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^r$$