Planches INP (2)

► 1 INP planche D

■ Exercice majeur

1) Résoudre : $y'(x)+2\pi x\, y(x)=0$ et $y(0)=1$.

2) On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $b_n\colon t\mapsto t^n\exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t$.

3) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$B_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)\exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que B_n est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que : $B_0(x)=\exp(-\pi x^2)$.

5) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme :

$$t\longmapsto P(t)\exp(-\pi t^2)\quad\text{où } P\in\mathbb{C}[X].$$

Montrer que toutes les fonctions B_n appartiennent à E.

■ Exercice mineur

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On considère N urnes numérotées de 1 à N.
Dans l'urne i, il y a i boules numérotées de 1 à i.

On choisit au hasard, succesivement, une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

1) Donner la loi de X.

2) Déterminer l'espérance de X.

► 2 INP planche E

■ Exercice majeur

1) On pose $P=X^2-2X+1$ et $Q=P+P'+P''$.
Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q y est strictement positive.

2) Soit $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]\setminus\{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$Q=\sum_{k=0}^{2n}P^{(k)}.$$

a. Exprimer Q'.

b. À l'aide de la fonction $g\colon t\mapsto \mathrm{e}^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$(P\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{2n}(PQ)^{(k)}(0).$$

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.

b. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

c. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
Ce nombre est noté u_n.

4) Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!)=n\ln(n)-n+\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(n).$$

■ Exercice mineur

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose :

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Sa somme est notée f.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

► 3 INP planche F

■ Exercice majeur

Soit S l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x)-(x^4+1)\,y(x)=0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\big(f(x)\big)^2$.
Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ g''(x)\geqslant 0$.

4) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \big(f(x)\big)^2\geqslant 1$.

5) Posons : $h(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que h est bien définie et que $h \in S$.

6) Montrer que (f, h) est une base de S.

■ Exercice mineur

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.

2) Pour quelles valeurs de z la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable ?