Algèbre - Chapitre 13

Applications linéaires en dimension finie - Matrices

I Utilisation des bases, rang

1) Bases et applications linéaires :

a) Caractérisation par l'image d'une base

On rappelle que si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, on appelle **coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$ l'unique $n-$uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie (cf chapitre espaces vectoriels).

Theorème 1 :

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finies et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ un p uplet de vecteurs de F (pas forcément tous distincts).
Alors il existe une unique application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$\varphi(e_1) = f_1, \varphi(e_2) = f_2, \ldots, \varphi(e_p) = f_p$$

▷ *Preuve* :

$\triangleleft$

Conséquence :
On peut décrire une application linéaire en donnant simplement l'image d'une base : elle sera alors entièrement déterminée !

Exemple :
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

On suppose que $f((1,0,0)) = (1,0)$, $f((0,1,0)) = (1,1)$ et $f((0,0,1)) = (0,1)$.

Or, pour tout $u = (x,y,z)$, on peut écrire $u = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$. Comme f est linéaire, on a :

b) Espaces vectoriels isomorphes

Définition :

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** si et seulement si il existe un isomorphisme de E dans F.

Exemple :
Considérons $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel (c'est bien un espace vectoriel qui peut être vu comme $Vect(1,i)$, donc $\mathbb{C}$ est de dimension 2).

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(x,y) = x + iy$$

Alors f est linéaire et bijective : c'est un isomorphisme.

Ainsi $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

Theorème 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension fini et F un espace vectoriel.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie avec $dim(F) = dim(E)$.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

On a donc immédiatement le résultat suivant :

Corolaire 1 :
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque :
On a déjà évoqué qu'on pouvait identifier $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et qu'on peut donc écrire $u = (x, y, z)$ ou $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Ce résultat justifie pleinement cet identification : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension n, donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

c) Sous espaces supplémentaires et applications linéaires :

Theorème 3 :
Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E, et soit F un espace vectoriel.
Alors pour tout $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application linéaire f telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemple :
Supposons $E = F_1 \oplus F_2$ et soit f_1 définie sur f_1 par $f_1 = id_{F_1}$ et soit f_2 définie par $f_2 = -id_{F_2}$.
Alors l'unique application dont parle le théorème est

2) Théorème du rang

a) Rappel et complément

Définition : (rappel)

Soient f une application linéaire de E dans F. On appelle **rang** de f, noté $rg(f)$ la dimension de Imf (si cet espace est de dimension finie). On dit alors que l'application f est de **rang fini**.

Proposition 1 :

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires de rang fini, alors

$$rg(g \circ f) \leq min(rg(f), rg(g))$$

▷ *Preuve* :

◁

Proposition 2 : composition par des isomorphismes

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang fini. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(G,E)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,H)$ des isomorphismes. Alors le rang de f est conservé par composition :

$$rg(f) = rg(f \circ \varphi) = rg(\psi \circ f)$$

▷ *Preuve* :

◁

b) Forme géométrique du théorème du rang

Theorème 4 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F des espaces vectoriels. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. Alors $f_{|S}$ est un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im} f$.

▷ *Preuve :*

◁

c) Théorème du rang

Theorème 5 : Théorème du rang
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. On a :

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

▷ *Preuve :*

◁

3) Lien avec l'injectivité et la surjectivité

a) Image et injectivité/surjectivité/bijectivité

Propriété 1 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire **injective**. Alors l'image par f de toute famille libre est une famille libre.
Autrement dit : si $(e_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre également.

▷ *Preuve :*

◁

Proposition 3 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une base de E. On note $f(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$. On a alors les résultats suivants :

1. f injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.
2. f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F
3. f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

▷ *Preuve* :

◁

b) Inversibilité en dimension finie

Proposition 4 : Equivalence des notions

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F deux espaces vectoriels **de même dimension** finie.
Alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective .

▷ *Preuve* :

◁

c) Inversibilité à gauche, à droite....

Définition :

On dit qu'un endomorphisme f est **inversible à gauche** (resp. **inversible à droite**) si et seulement si il existe un endomorphisme g tel que $g \circ f = id_E$. (resp. $f \circ g = id_E$))

Un endomorphisme inversible à gauche ou à droite n'est pas forcément un isomorphisme.

Exemple : soit $\psi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ associe sa primitive qui s'annule en 0 (c'est à dire $\psi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$).
Alors ψ est inversible à gauche, et son inverse à gauche est

En revanche, ψ n'est pas bijective car

Cependant, en dimension finie , ce genre de situation ne peut pas se produire :

Proposition 5 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Si f est inversible à droite ou à gauche, alors f est bijective

▷ *Preuve* :

◁

4) Hyperplans en dimension finie

a) Définition

Définition :

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle **hyperplan** de E tout sous espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exemple :
soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - z - t = 0\}$. Alors

b) Noyaux et hyperplans :

Rappel : On dit que f est une forme linéaire si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, autrement dit si les images de f sont des scalaires.

Proposition 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors F est un hyperplan de E si et seulement si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - z - t = 0\}$. Alors $F = \text{Ker} f$ où $f(x, y, z, t) = x + y - z - t$. Ainsi F est un hyperplan (donc de dimension 3).

Proposition 7 :

Soit H un hyperplan de E et D une droite vectorielle non incluse dans H.
Alors H et D sont des espaces supplémentaires dans E. (Autrement dit $E = H \oplus D$).

▷ *Preuve* :

◁

c) Equations d'hyperplan

Les hyperplans étant des noyaux de forme linéaires, ils sont naturellement associées à une équation :

Proposition 8 :

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n. Une partie H de E est un hyperplan si et seulement si il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que

$$\forall u \in E, \quad \left(u \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right)$$

Où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

On dit alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est une équation de H dans la base $\mathcal{B}$.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
On peut montrer que des hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations sont proportionnelles

Exemples :
Depuis qu'on a commencé les espaces vectoriels, on a très souvent fait ça.

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$. C'est bien un hyperplan et son équation est $x + y + z = 0$.
2. De manière générale, tout ensemble $P \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ avec a, b et c non tous nul est un plan, de dimension 2 et donc en fait un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
3. Les droites vectorielle de $\mathbb{R}^2$, d'équation $ax + by = 0$ sont des hyperplans également.

II Matrice d'une application linéaire

1) Notation matricielle (rappel)

a) Matrice d'un vecteur dans une base

Définition :

Soit u un vecteur d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ (donc $u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$).

On définit la **matrice de u dans la base $\mathcal{B}$** comme étant la matrice colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple

Pour $u = (0, 2)$, dans la base canonique $\mathcal{C} = ((1,0), (0,1))$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\mathcal{B} = ((1,1), (-1,0))$, comme $u = 2(1,1) + 2(-1,0)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Combinaison linéaire et représentation matricielle

La représentation matricielle conserve les combinaisons linéaires :

Propriété 2 :

Soient u et v deux vecteurs d'un s.e.v. E muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soient λ et μ deux scalaires.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$

▷ *Preuve* : Il suffit de raisonner sur les coordonnées.
On notons $e_1, e_2, \ldots e_p$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
Soient u et v deux vecteurs.

Alors il existe des p-uplets de scalaires tels que $u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{p} y_k e_k$.

Donc $\lambda u + \mu v = \sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + \mu y_k) e_k$

Ainsi les coordonnées de la combinaison linéaire sont données par la combinaison linéaire des coordonnées... ◁

c) Matrice d'une famille de vecteurs

Définition :

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2 \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E. On définit **la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$** dans la base $\mathcal{B}$ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constituée des matrices colonnes donnant les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) & \ldots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p) \end{pmatrix}$$

Exemples :

- $\mathcal{F} = (u_1; u_2; u_3)$ avec $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (-1,2,3)$ et $u_3 = (1,2,4)$ a pour matrice dans la base canonique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- ▶ Dans $\mathbb{K}_2[X]$, posons $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = 2X + 1$ et $P_3 = 3$.
  La matrice de $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ est

  De plus $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$. Dans cette base, la matrice de (P_1, P_2, P_3) est

2) Matrice d'une application linéaire

a) Construction

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F avec E et F de dimension finie.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de F. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ les coordonnées de $f(e_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$ de F
On définit alors **la matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$** comme étant la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, c'est à dire ici :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \quad & \uparrow \\ f(e_1) & & f(e_p) \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée sur } e'_1 \\ \leftarrow \text{coordonnée sur } e'_2 \\ \quad \vdots \\ \leftarrow \text{coordonnée sur } e'_n \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarques

1. Les vecteurs sont toujours mis en colonne.
2. si f va de E dans F avec $dim(E) = p$ et $dim(F) = n$, on obtient une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (n lignes, p colonnes) : c'est "inversé" (n en premier).
3. Comme l'image d'une base suffit à définir toute l'application linéaire, on pourra directement définir f à partir de sa matrice dans des bases précisées (parfois les bases canoniques, mais pas seulement...).
4. Par unicité d'écriture dans les bases, deux applications linéaires qui ont la même matrice dans les même bases sont égales. On dit que la matrice d'une application linéaire **caractérise** l'application linéaire.

Exemples

- ▶ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x, 2y)$.
  On peut montrer que f est linéaire et on on a $f(1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 1) = (-1, 0, 2)$.
  La matrice de f dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Soit $id_E : E \to E$ l'application identité, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors matrice de id_E dans le couple de base $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ est

- Soit $f : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X]$ définie par $f : P \mapsto P'$.

b) Calcul via la matrice

Proposition 9 :

Soient E et F deux e.v. de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ de matrice représentative A dans le couple de base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Soit $u \in E$ et X sa matrice dans $\mathcal{B}$.
Alors $f(u)$ a pour représentation matricielle AX dans $\mathcal{B}'$: autrement dit, AX donne les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

▷ *Preuve* : Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ (ainsi $dim(E) = p$) et $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ (donc $dim(F) = n$).
Pour chaque e_k de la base $\mathcal{B}$, on peut exprimer $f(e_k)$ (qui appartient à F) dans la base $\mathcal{B}'$

C'est à dire, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe n scalaires $a_{1k}, \dots a_{nk}$ tel que $f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i$

Autrement dit, les coordonnées de $f(e_k)$ dans $\mathcal{B}'$ sont données par la matrice $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$.

Soit maintenant $u \in E$, représenté dans la base $\mathcal{B}$ par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, et soit $y = f(u)$ représenté dans la base $\mathcal{B}'$ par la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a donc,

$$u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$$

Par linéarité de f, on a également $y = f(u) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k)$ et donc

$$y = \sum_{k=1}^{p} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{p} a_{ik} x_k) u_i$$

Ainsi, y a aussi pour matrice $\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} x_k \end{pmatrix}$.

Or, la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix}$. Calculons AX on a :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} x_k \end{pmatrix}$$

C'est à dire finalement :

$$AX = Y$$

On retrouve effectivement les coordonnées de $f(u)$ en calculant AX....

$\triangleleft$

Exemple
Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ une application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^3$ et $\mathbb{K}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$f(x, y, z)$ a pour matrice

Autrement dit $f(x, y, z) =$

Attention :
L'exemple ci dessus fonctionne très bien car on est dans la base canonique. Si la matrice n'est pas donnée dans les bases canoniques, c'est un peu plus compliqué....

c) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On identifie dans cette section $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: autrement dit, les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont vus comme des matrices colonnes.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$f : X \mapsto AX$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ est canoniquement associé à l'application :

Cette définition permet de donner naturellement les définitions suivantes :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et f l'application linéaire canoniquement associée à f.
On appelle **noyau** de A, notée $\mathrm{Ker} A$, le noyau de f.
On appelle **image** de A, notée $\mathrm{Im}\, A$, l'image de f.
On appelle **rang** de A, notée rgA, la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Au secours ! ON AVAIT QUE LE RANG C'ÉTAIT....

La première fois qu'on a défini le rang d'une matrice, on avait dit que c'était le rang du système associé.... On va, temporairement, changer cette définition....

Méthode : IMAGE ET NOYAU DE MATRICE

Les résultats donnés dans l'étude des applications linéaires se transmettent de manière efficace aux matrices.

- L'image d'une application linéaire est engendré par l'image d'une base, donc :

  $\boxed{\text{L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice.}}$

- Le calcul du noyau revient à résoudre $AX = 0$ et ainsi :

  $\boxed{\text{Les lignes de la matrices donnent un système d'équation du noyau.}}$

3) Structure des matrices et lien avec les applications linéaires

a) Linéarité de la représentation

Propriété 3 :
Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et soit λ et μ deux scalaires. Si f est représentée par une matrice A et g par une matrice B (dans les mêmes bases), alors $\lambda f + \mu g$ est représentée par $\lambda A + \mu B$

$\triangleright$ *Preuve* : Immédiat en calculant les images de la base : $(\lambda f + \mu g)(e_k) = \lambda f(e_k) + \mu g(e_k)$. $\triangleleft$

Ceci permet de donner le résultat suivant :

Theorème 6 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.
En particulier, $dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

b) Composition d'applications

Soient E, F et G des s.e.v de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On suppose que f est représentée par une matrice A dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et g par une matrice B dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

Soit $u \in E$ représenté par la matrice X dans $\mathcal{B}$.
Alors $f(u)$ a pour matrice représentative AX dans $\mathcal{B}'$

Enfin, $g(f(u))$, dans la base $\mathcal{B}''$, a pour matrice représentative $B(AX) = (BA)X$.
Le produit matriciel donne donc la composée :

Propriété 4 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ où E, F et G des s.e.v de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$
On suppose que f est représentée par une matrice A dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et g par une matrice B dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
Alors $g \circ f$ a pour matrice représentative BA dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$.

Remarque : Cas particulier des endomorphismes

Notation

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, avec E un espace de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E.
On note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ (c'est à dire en prenant la même base en départ et arrivée)

Les matrices d'endomorphismes sont des matrices carrées :

Exemple :

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
  Alors f a pour matrice :

- Soit $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X]$ définie par $\varphi(P) = (X - 1)P'$.
  Déterminons la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$:

c) Lien avec les matrices inversibles

Theorème 7 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ un endomorphisme de matrice représentative A.
f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.
Dans ce cas, la matrice de f^{-1} est A^{-1}.

▷ *Preuve* : Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} existe et est linéaire.
De plus, E et F ont même dimension et la matrice représentative est donc carrée.
Notons B la matrice représentative de f^{-1} dans un couple de base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$
Comme $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$, on a

$$AB = BA = I$$

Donc A est inversible d'inverse B et donc f^{-1} a pour matrice A^{-1}.

Réciproquement, si A est inversible, alors il existe une matrice B tel que $AB = BA = I$.
Notons g l'application de F dans E dont B est la matrice représentative. Alors $f \circ g$ a pour matrice AB et comme $AB = I$, $f \circ g = Id_F$. De même $g \circ f = Id_E$ et donc f est bijective de bijection réciproque g. ◁

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$. f admet pour matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On veut montrer que f est inversible et préciser f^{-1} :

Corolaire 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire une matrice carrée d'ordre n. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $BA = I_n$ ou $BA = I_n$
Alors A est inversible d'inverse B.

▷ *Preuve* :
C'est en fait la proposition 5, qui dit la même chose sur les applications linéaires. ◁

Et toujours en traduisant les résultats de la première partie de ce chapitre en terme de matrice, on a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 10 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.
(ii) Le noyau de A est l'espace nul.
(iii) Les colonnes de A engendre $\mathbb{K}^n$.
(iv) Les colonnes de A sont une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
(v) Les colonnes de A sont une base de $\mathbb{K}^n$.
(vi) Le rang de A est n.

Notons que le point (iv) justifie la propriété suivante :

Propriété 5 :

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si il n'y a aucun zero sur la diagonale.

En effet, la famille constituée des vecteurs colonnes est alors immédiatement libre, et est liée dans le cas contraire.

III Changement de base

1) Matrice de passage

a) Définition :

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ la matrice donnant les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
On note alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ cette matrice.

Exemples :

- Dans $\mathbb{K}^3$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$, la matrice de passage est :

- Dans $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathcal{B} = (2, X+1, X^2+1)$ et $\mathcal{B}' = (4, 2X^2 - X + 1, X)$, la matrice de passage est

Propriété 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ est son inverse.

▷ *Preuve* :
considérons l'endomorphisme de E définie pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ par $f(e_i) = e'_i$ où $\mathcal{B} = (e_i)$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)$.
Comme l'image d'une base est une base, cet endomorphisme est un isomorphisme, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
En considérant maintenant l'application définie pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ par $g(e'_i) = e_i$, sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est donc $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.
On a $g \circ f = id_E$, et donc matrice de $g \circ f$ dans le couple $(\mathcal{B},\mathcal{B})$ est $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, est $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = Id$ ◁

b) Formule de changement de base

Proposition 11 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soient enfin $u \in E$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$
Alors
$$X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X$$

▷ *Preuve* :

◁

Danger ! **FORMULE "À L'ENVERS" !**

La proposition précédente permet de passer des coordonnées d'un vecteur exprimées dans une base $\mathcal{B}$ à celles exprimées dans une nouvelle base $\mathcal{B}'$, mais c'est "à l'envers" par rapport à la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
En effet, la relation $X = PX'$ donne donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. C'est plutôt $X' = P^{-1}X$ qui nous sera utile (les nouvelles en fonction des anciennes).

Exemple
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B}' = ((1,2),(-1,3))$.
Quelles sont les coordonnées de $u = (3,4)$ dans $\mathcal{B}'$?

2) Effet sur la matrice d'une application linéaire

a) Cas général

La formule de changement de base précédente va nous permettre d'écrire la base d'une application linéaire dans un couple de bases différentes.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E, soient $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f dans le couple de base $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$
On pose de même $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$.
Soient les matrices de passage $P = P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F}$.

Pour tout $u \in E$, posons maintenant les matrices suivantes :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u),\ X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(u),\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u)) \text{ et } Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F}(f(u))$$

On a $Y = AX$. En multipliant à gauche par Q^{-1}, on obtient

$$QY = Q^{-1}AX$$

Or $Y' = Q^{-1}Y$ et $X = PX'$, donc on obtient

$$Y' = Q^{-1}APX'$$

Et cette relation est valable pour tout $u \in E$: cela signifie que $A' = Q^{-1}AP$

Proposition 12 : formule de changement de base pour les applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E, et soient $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F.

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f dans le couple de base $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Soit $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de f dans le couple de base $(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$.

Alors

$$A' = Q^{-1}AP$$

où $P = P_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}'_E}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F \to \mathcal{B}'_F}$ sont les matrices de changement de base entre les bases respectives.

b) Cas particulier des endomorphismes

Proposition 13 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, A la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors

$$A' = P^{-1}AP$$

▷ *Preuve* : c'est un cas particulier de la proposition précédente ◁

Remarque :
C'est ce genre de formule qu'on a utilisé pour calculer des puissances n-ième de matrice, en faisant en sorte que $A' = D$ une matrice diagonale.

3) Matrices semblables

Définition :

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$A = P^{-1}BP$$

Interprétation :
Deux matrices semblables sont représentatives du même endomorphisme dans des bases différentes.

Exemple d'utilisation :
Si $A = P^{-1}BP$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on va avoir (dans l'idée) :

$$A^k = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)(\dots)(P^{-1}BP)$$

L'associativité du produit matriciel va permettre de regrouper les PP^{-1} ce qui donne :

$$A^k = P^{-1}B^kP$$

Une telle formule peut se montrer rigoureusement par récurrence comme on l'a déjà fait plusieurs fois.
Ainsi, si B est diagonale par exemple, A^k sera très facile à calculer.

IV Lien entre les différents chapitres d'algèbre linéaire

1) Système, matrice et applications linéaires

a) Rappel : écriture matricielle d'un système

On rappelle ici les résultats du chapitre 8 (matrices et systèmes) :
Soit (S) un système de n équations linéaires, d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$. Ainsi, (S) est de la forme

$$(S) : \left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots\dots\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & \dots\dots\dots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right.$$

Où $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
On définit naturellement les matrices A et B par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots\dots\dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ainsi $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si la matrice X est solution de

$$AX = B$$

b) Interprétation en terme d'application linéaire

En voyant A comme la matrice de l'application linéaire canoniquement associée, résoudre un système revient en réalité à étudier une application linéaire.
Les résultats suivants sont ainsi une reformulation de résultats qu'on connait déjà :

Proposition 14 :

- Le système $AX = B$ est compatible si seulement si $B \in \mathrm{Im}\, A$
- Si le système $AX = B$ est compatible, l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est de la forme $\mathrm{Ker} A + X_0$ où X_0 est une solution particulière de l'équation.
- L'ensemble $\mathrm{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système homogène et est de dimension $n - rg(A)$ où n est le nombres d'inconnues du système (théorème du rang).

Notons enfin le résultat suivant :

Proposition 15 :

Si A est inversible (autrement dit, si l'application associée est un isomorphisme),
le système $AX = B$ possède une unique solution, donnée par $A^{-1}(B)$.
On dit alors que le système est **système de Cramer**.

2) Rang d'une matrice

a) lien entre les diverses notions de rang

La "vraie" définition du rang d'une matrice n'est pas celle que l'on a vu lors du chapitre sur les systèmes, mais elle est en réalité définie comme étant le rang de l'image de l'application linéaire associée.

Comme le rang de l'application linéaire est également le rang de l'image d'une base, on a immédiatement ce lien "rang de matrice/rang de famille de vecteur" :

Proposition 16 :

Le rang d'une matrice A est le rang de la famille de vecteurs dont les coordonnées sont données par les colonnes de A.

En admettant le résultat suivant :

Proposition 17 :

$rg(A) = rg(A^T)$

on a également :

Proposition 18 :

Le rang d'une matrice A est aussi le rang de la famille de vecteurs dont les coordonnées sont données par les lignes de A.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) Cas des matrices échelonnées

Proposition 19 :

Soit A une matrice échelonnée, c'est à dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2p} \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{rr} & \dots & a_{rp} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec pour tout } 1 \leq i \leq r,\ a_{ii} \neq 0$$

Alors $rg(A) = r$.

▷ *Preuve* : Notons $u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})$, $u_2 = (0, a_{22}, \dots, a_{2p})$, ... , $u_r = (0, \dots, 0, a_{rr}, \dots, a_{rp})$, puis $u_{r+1} = u_{r+2} = \dots = u_n = (0, \dots, 0))$.
(Autrement dit : les u_i sont les lignes de la matrice).

Déterminons le rang de la famille $u_1, u_2, \dots, u_n$.
Clairement, $Vect(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n) = Vect(u_1, \dots, u_r)$.

Reste à montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ est libre. Supposons $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = (0, \dots, 0)$. La première coordonnée de cette somme est $\lambda_1 a_{11}$. Comme $a_{11} \neq 0$, $\lambda_1 = 0$.

La deuxième coordonnée est $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}$, donc $\lambda_2 a_{22} = 0$ (puisque $\lambda_1 = 0$) et enfin $\lambda_2 = 0$.

On continue ainsi, et on arrive à $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, donc la famille est libre et la matrice est de rang r. ◁

Remarque :

Ceci montre que le rang d'une matrice échelonnée est bien le rang du système associé, tel que nous l'avions défini dans le premier chapitre.

c) Opérations élémentaires, noyau, image et rang

On rappelle qu'il y a trois opérations élémentaires, effectuées sur les lignes ou sur les colonnes.

(i) Echanger les lignes (ou colonnes) i et j : opération notée "$L_i \leftrightarrow L_j$" (ou "$C_i \leftrightarrow C_j$") On dit qu'on a effectué une **permutation**.

(ii) Multiplier une ligne (ou colonne) par un scalaire non nul : "$L_i \leftarrow \lambda L_i$" (ou "$C_i \leftarrow \lambda C_i$") . On dit qu'on a effectué une **dilatation**.

(iii) Ajouter à L_i une dilatation de L_j (ou à C_i une dilatation de C_k)
"$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$" (ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$). On dit qu'on a effectué une **transvection.**

Les colonnes de la matrices de la matrice donnent l'image de A : les opérations (i) et (ii) sur les colonnes ne changent donc pas l'image.

Concernant L'opération (iii), on peut montrer assez simplement que si $u \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$, alors $u \in \text{Vect}(C_1, C_2, \dots C_i + \lambda C_j, \dots, C_n)$, et vice versa.

Ainsi

Propriété 7 :
Les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'image.

De même, les lignes donnent le système d'équations associé au noyau, et ainsi :

Propriété 8 :
Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le noyau.

Enfin, comme toutes ces opérations correspondent à des multiplications à gauche ou droite par des matrices inversibles, elles sont donc associées à des isomorphismes !
La proposition 2 à la page 5 donne alors :

Propriété 9 :
Les opérations élémentaires conservent le rang de la matrice.

Méthode : **Déterminer le rang d'une matrice**
Pour chercher le rang d'une matrice, on pourra effectuer un pivot de gauss sur la matrice elle même, sans considérer de système, jusqu'à transformer celle-ci en matrice étagée.
On en déduit alors le rang de la matrice de départ.

A noter qu'on peut encore énoncer de nombreux résultats liant les concepts. Par exemple :

Proposition 20 :
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ p vecteurs d'un espace de dimension finie E.
Soit A la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.
Soit S un système de matrice associée A. Soit f une application linéaire associée à A.
On a les résultats suivants :

1. $rg(\mathcal{F}) = rg(A) = rg(S) = rg(f)$
2. $\mathcal{F}$ est base de $E \Leftrightarrow A$ est inversible $\Leftrightarrow f$ est un isomorphisme.

et bien d'autres encore...