Planches Mines-Télécom (1)

► 1 Mines-Télécom planche A

■ Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left(n\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Déterminer $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

■ Exercice 2

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3+A^2+A=0.$$

Démontrer que $\mathrm{tr}(A)\in\mathbb{Z}$.

► 2 Mines-Télécom planche B

■ Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit s une symétrie de E. On pose :

$$\phi:\quad u\in\mathscr{L}(E)\ \longmapsto\ \phi(u)=\frac{1}{2}(u\circ s+s\circ u).$$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2) Déterminer un polynôme annulateur de ϕ.

3) ϕ est-il diagonalisable ?

■ Exercice 2

Soit $\theta\in\,]0,\pi[$ et $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sin(k\,\theta)\,x^k$.

1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=\big(\sin(k\,\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont la somme est f.

3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x\in\,]-R,R[$.

► 3 Mines-Télécom planche C

■ Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n\geqslant 1$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall\, i\in[\![1,\,n-1]\!],\ u(e_i)=e_{i+1}\quad\text{et}\quad u(e_n)=e_1.$$

1) Dans les cas $n=2$ et $n=3$, montrer que u est une isométrie et la caractériser géométriquement.

2) Dans le cas général, u est-il une isométrie ?
Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

On suppose à présent que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 1$, que $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et que u est défini comme précédemment.

3) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Déterminer le rang de $u-\lambda\,\mathrm{id}_E$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ et A la matrice définie par :

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1\\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

4) Exprimer la matrice A à l'aide du polynôme P et d'une matrice plus simple.
La matrice A est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

■ Exercice 2

Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ et g la fonction définie sur D par :

$$g(x,y)=\begin{cases} x\,y\,\ln(x^2+y^2) & \text{si } 0<x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$.

2) Montrer que g admet des extrema globaux sur D.

3) g admet-elle un extremum local en $(0,0)$?

4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de D ?