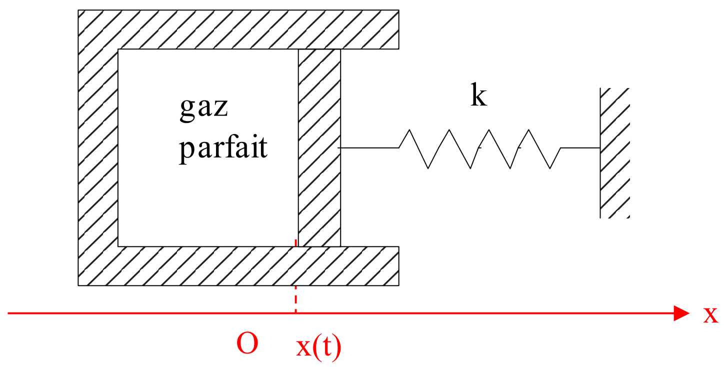
3.3 Second principe-Exercice 6

A l'équilibre, le ressort est non tendu, et le gaz parfait a une pression P_0, un volume V_0, une température T_0. L'enceinte est adiabatique.

Déterminer l'équation des petits mouvements du piston de section S.



On choisit l'origine O de l'axe Ox au niveau de la position d'équilibre du piston (ressort non tendu)
⇨ L'allongement du ressort est $\ell - \ell_0 = -x$

Référentiel d'étude : *R*(Oxyz) galiléen
Système : le piston
Actions sur le système selon Ox :

- Force de pression du gaz : $\vec{F}_{gaz} = PS\vec{u}_x$
- Force de pression de l'air extérieur : $\vec{F}_{air} = -P_0 S\vec{u}_x$
- Force du ressort : $\vec{F}_{ressort} = -kx\vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement selon Ox : $m\ddot{x} = -kx + (P - P_0)S$

On étudie des petits mouvements au voisinage de l'équilibre donc on peut supposer l'évolution réversible. Elle est en plus adiabatique donc on peut appliquer la loi de Laplace.

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad P(V_0 + Sx)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad P = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + Sx}\right)^\gamma = P_0 \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

$Sx << V_0$ donc : $P \approx P_0 \left(1 - \gamma \frac{Sx}{V_0}\right)$ puis $P - P_0 = -\gamma \frac{Sx}{V_0} P_0$

Donc : $m\ddot{x} = -kx - \frac{\gamma S^2 P_0}{V_0} x$

Soit : $\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} + \frac{\gamma S^2 P_0}{mV_0}\right)x = 0}$

On a un mouvement sinusoïdal de pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\gamma S^2 P_0}{mV_0}}$