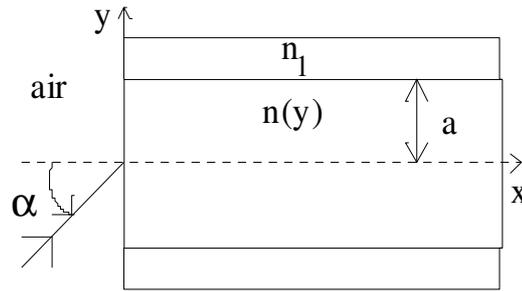


1.1 Optique géométrique-Exercice 12

On considère une fibre optique cylindrique ayant la structure ci-contre.
Soit un rayon lumineux d'incidence α .



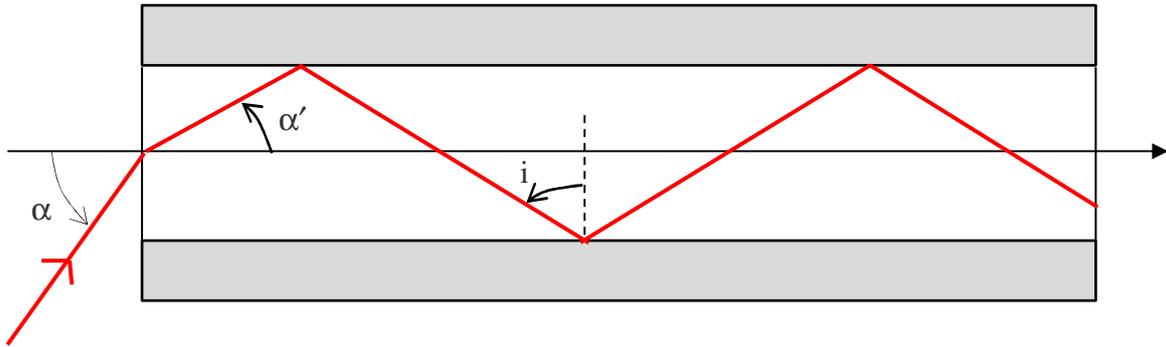
- a-On suppose que pour le cœur de la fibre : $n(y) = n_0 > n_1$
- Tracer le trajet du rayon lumineux
 - A quelle condition sur α n'y a-t-il pas de pertes ?
 - Que se passe-t-il si la fibre fait un coude marqué ?

b-On a désormais : $n(y) = n_0 \sqrt{1 - \left(\frac{ky}{a}\right)^2}$. Déterminer k pour que n soit continu en a.

Montrer que la trajectoire du rayon vérifie : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = An^2 - 1$. Résoudre l'équation.

1.1 Optique géométrique-Exercice 12

a- La lumière est guidée par une succession de réflexions sur le dioptre n_0/n_1 .



• Pour qu'il n'y ait pas de pertes, il faut que les réflexions soient totales : $i > i_{\text{lim}} = \text{Arc sin}\left(\frac{n_1}{n_0}\right) \Rightarrow \sin i > \frac{n_1}{n_0}$

Or $i = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) > \frac{n_1}{n_0} \Rightarrow \cos(\alpha') > \frac{n_1}{n_0}$

Loi de Descartes de la réfraction à l'entrée : $\sin \alpha = n_0 \sin \alpha' \Rightarrow \alpha' = \text{Arc sin}\left(\frac{\sin \alpha}{n_0}\right)$

La condition sur α est donc : $\cos\left(\text{Arc sin}\left(\frac{\sin \alpha}{n_0}\right)\right) > \frac{n_1}{n_0}$

Or $\cos^2\left(\text{Arc sin}\left(\frac{\sin \alpha}{n_0}\right)\right) + \sin^2\left(\text{Arc sin}\left(\frac{\sin \alpha}{n_0}\right)\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\text{Arc sin}\left(\frac{\sin \alpha}{n_0}\right)\right) = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_0^2}$

La condition peut se réécrire : $1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_0^2} > \frac{n_1^2}{n_0^2}$ soit finalement : $\sin \alpha < \sqrt{n_0^2 - n_1^2}$

• Si la fibre est courbée, l'angle i va diminuer et il risque de devenir inférieur à i_{lim} . Il n'y aura plus réflexion totale et le rayon va sortir de la fibre.

b- On veut $n(a) = n_1$ donc $n_0 \sqrt{1 - k^2} = n_1$ d'où $k = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2}$

• La fine tranche de cœur entre y et $y+dy$ joue le rôle de dioptre entre des milieux d'indices $n(y)$ et $n(y+dy)$.

Donc : $n(y) \sin i(y) = n(y+dy) \sin i(y+dy)$

On en déduit $n(y) \sin i(y) = \text{constante} = C$

Or : $\sin i(y) = -\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ ($i < 0$ sur la figure)

$n^2(y) \sin^2 i(y) = C^2 \Rightarrow \frac{n^2(y)}{C^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
 $\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = An^2(y) - 1$ avec $A = \frac{1}{C^2}$

Donc : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n_0^2}{C^2} \left(1 - \left(\frac{ky}{a}\right)^2\right)$

On dérive par rapport à x : $2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = -2An_0^2 \frac{k^2}{a^2} y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + An_0^2 \frac{k^2}{a^2} y = 0$

Equation d'un oscillateur harmonique $\Rightarrow y$ est une fonction sinusoïdale de x . Le rayon est sinusoïdal.

