# Planches INP (3)

## ► 1 INP planche G

### ■ Exercice majeur

Soit $F$ l'ensemble des fonctions dérivables de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

Soit $G$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \mathrm{e}^t g\left(\frac{t}{2}\right).$$

**1)** Montrer que $G$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2)** **a.** Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que $g$ appartient à $G$.
**b.** Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$. Montrer que $f$ appartient à $F$.

**3)** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$.
On suppose que $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ appartient à $G$.

**a.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

**b.** Montrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \dfrac{2^n}{n!}.$

**4)** **On admet que toutes les fonctions de $G$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.**

**a.** Montrer que $\dim(G) = 1$.
**b.** Qu'en déduit-on concernant $F$ ?

### ■ Exercice mineur

Soit $P(X) = X^4 + 4$.

**1)** Montrer que $P$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

**2)** Factoriser $P$ au maximum dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

## ► 2 INP planche H

### ■ Exercice majeur

Pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|M\|_\infty = \max\left\{|m_{i,j}| \,;\, 1 \leqslant i,j \leqslant n\right\}.$$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**2)** On pose $N := A - \mathrm{I}_3$.
Calculer $N^2$, puis les autres puissances de $N$.

**3)** Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**4)** Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$.

**5)** Pour tout couple $(M,N)$ de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

**6)** On suppose que $M$ est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.
Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

### ■ Exercice mineur

Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On pose :

$$\forall f,g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1)** Montrer que $E$ est un espace préhilbertien réel.

**2)** Calculer $\|\cos\|^2$.

**3)** Orthonormaliser la famille $(\sin, \cos)$.

**▶ 3** INP planche I

## ■ Exercice majeur

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
On définit la fonction $f: x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des $I_n$.

**1)** Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

**2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $I_n$.
**On notera $x_n$ cette solution dans la suite de l'exercice.**

**3)** Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

**4)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité :

$$y_n = \arctan(x_n).$$

En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$.

**5)** Montrer que :

$$\tan\left(y_n = \tfrac{\pi}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} y_n - \tfrac{\pi}{2}.$$

**6)** En déduire un développement asymptotique de la forme :

$$y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

**7)** Obtenir un développement asymptotique de la forme :

$$y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

## ■ Exercice mineur

**1)** Soit $M = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
À quelle condition sur $a$ la matrice $M$ possède-t-elle deux valeurs propres réelles distinctes ?

**2)** Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2Z & 1 \\ -4 & Z \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité que $M$ possède deux valeurs propres réelles distinctes ? soit diagonalisable ?