Planches Mines-Télécom (1)

► 1 Mines-Télécom planche A

■ Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Déterminer $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Solution. On écrit :

$$\forall\, n\geqslant 1,\quad u_n=\exp\Big[\,n^2\,\ln\big(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\big)\Big].$$

On effectue un DL à deux termes de l'argument du logarithme :

$$\sin(x)=x-\frac{1}{6}\,x^3+\mathrm{o}\big(x^3\big)\quad\text{et}\quad \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\begin{aligned}
\text{donc :}\qquad n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)&=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6\,n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&=1-\frac{1}{6\,n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right);\\
\text{puis :}\qquad \ln\big(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\big)&=\ln\Bigg(1\underbrace{-\frac{1}{6\,n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 0\text{ quand } n\to\infty}\Bigg)\\
&\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{6\,n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{6\,n^2},\\
\text{d'où :}\qquad n^2\,\ln\big(n\,\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\big)&\underset{n\to\infty}{\sim}-\frac{1}{6\,n^2}\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{}-\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Finalement, par composition de limites avec $\exp(x)\xrightarrow[x\to-1/6]{}\mathrm{e}^{-1/6}$:

$$u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{-1/6}.$$

■ Exercice 2

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3+A^2+A=0.$$

Démontrer que $\mathrm{tr}(A)\in\mathbb{Z}$.

Solution. Le polynôme $P\coloneqq X^3+X^2+X$ est annulateur de A. Pour le factoriser dans $\mathbb{C}$, on mobilise les racines cubiques de l'unité :

$$\begin{aligned}
P&=X\times(X^2+X+1)\\
&=X\times\frac{X^3-1}{X-1}\\
&=X\times\frac{(X-1)\,(X-\mathrm{j})\,(X-\mathrm{j}^2)}{X-1}\qquad(\text{où } \mathrm{j}\coloneqq\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})\\
&=X\,(X-\mathrm{j})\,(X-\mathrm{j}^2).
\end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres *complexes* de A se trouvent parmi 0, j, j^2 :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\subset\big\{0,\ \mathrm{j},\ \mathrm{j}^2\big\}.$$

Le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ et ses racines se trouvent parmi 0, j, j^2 ; comme il est unitaire, il se factorise sous la forme :

$$\chi_A(X)=X^a\,(X-\mathrm{j})^b\,(X-\mathrm{j}^2)^c\quad\text{où } a,b,c\in\mathbb{N}.$$

(noter que a, b ou c peuvent s'annuler si jamais le complexe correspondant n'est pas racine de χ_A)
Comme A est une matrice *réelle*, ses racines *complexes* sont conjuguées, et deux racines conjuguées ont même ordre de multiplicité.
Puisque $\mathrm{j}^2=\overline{\mathrm{j}}$, on a $b=c$.
Le degré de χ_A est égal à la taille de A, soit n.
On en déduit que :

$$\chi_A(X)=X^{n-2a}\,(X-\mathrm{j})^a\,(X-\mathrm{j}^2)^a.$$

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, la trace de A est la somme des valeurs propres de A répétées selon leur ordre :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A)&=(n-2a)\,.\,0+a\,.\,\mathrm{j}+a\,.\,\mathrm{j}^2\\
&=a\,.\,\big(\mathrm{j}+\overline{\mathrm{j}}\,\big)\\
&=2\,a\ \mathrm{Re}(\mathrm{j})=-a\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

► 2 Mines-Télécom planche B

■ Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit s une symétrie de E. On pose :

$$\phi:\quad u\in\mathscr{L}(E)\ \longmapsto\ \phi(u)=\frac{1}{2}\,(u\circ s+s\circ u).$$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Solution.

1) $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.
2) Pour tout $u\in\mathscr{L}(E)$, on a bien $\phi(u)\in\mathscr{L}(E)$ car $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel stable par $\circ$.
3) Montrons que ϕ est linéaire : soit $u,v\in\mathscr{L}(E)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha\,u+\beta\,v)&=\frac{1}{2}\,\Big((\alpha\,u+\beta\,v)\circ s+s\circ(\alpha\,u+\beta\,v)\Big)\\
&=\frac{1}{2}\,\Big((\alpha\,u\circ s+\beta\,v\circ s)+(\alpha\,s\circ u+\beta\,s\circ v)\Big)\\
&=\alpha\,\Big(\tfrac{1}{2}\,(u\circ s+s\circ u)\Big)+\beta\,\Big(\tfrac{1}{2}\,(v\circ s+s\circ v)\Big)\\
&=\alpha\,\phi(u)+\beta\,\phi(v).
\end{aligned}$$

2) Déterminer un polynôme annulateur de ϕ.

Solution. Calculons les premières puissances de ϕ de façon à en fabriquer une combinaison linéaire nulle. Pour tout $u\in\mathscr{L}(E)$:

$$\mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)}(u)=u\ ;$$

$$\phi(u)=\frac{1}{2}\,(u\circ s+s\circ u)\ ;$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(u)&=\big[\phi\circ\phi\big](u)=\phi\,\big(\phi(u)\big)\\
&=\frac{1}{2}\,\big(\phi(u)\circ s+s\circ\phi(u)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(u\circ s+s\circ u)\circ s+s\circ\tfrac{1}{2}(u\circ s+s\circ u)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(u\circ s^2+2s\circ u\circ s+s^2\circ u\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2u+2s\circ u\circ s\right) \qquad \text{car } s^2=\mathrm{id}_{\mathscr{L}(E)}\\
&= \frac{1}{2}\left(u+s\circ u\circ s\right) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^3(u) &= \left[(\phi\circ\phi^2)\right](u)=\phi\left(\phi^2(u)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(u+s\circ u\circ s)\circ s+s\circ\tfrac{1}{2}(u+s\circ u\circ s)\right)\\
&= \frac{1}{2}(u\circ s+s\circ u).
\end{aligned}$$

On constate que $\phi^3=\phi$, donc que $P:=X^3-X$ est un polynôme annulateur de ϕ.

3) ϕ est-il diagonalisable ?

Solution. Le polynôme $P=X(X^2-1)=X(X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples. Puisque il annule ϕ, ϕ est diagonalisable.

■ Exercice 2

Soit $\theta\in\,]0,\pi[$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sin(k\,\theta)\,x^k$.

1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=\big(\sin(k\,\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

Solution. **Par l'absurde, supposons que $u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.** Alors la suite extraite $(u_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ tend également vers 0 :

$$\sin\big((k+1)\,\theta\big)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Or, grâce à la formule d'addition :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \sin\big((k+1)\,\theta\big)=\sin(k\,\theta)\,\cos(\theta)+\cos(k\,\theta)\,\sin(\theta).$$

Comme $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$, on a $\sin(\theta)\neq 0$, ce qui permet d'isoler $\cos(k\,\theta)$; pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\cos(k\,\theta)&=\frac{1}{\sin(\theta)}\left(\sin\big((k+1)\,\theta\big)-\sin(k\,\theta)\,\cos(\theta)\right)\\
&\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{\sin(\theta)}\left(0-0\,.\,\cos(\theta)\right)=0.
\end{aligned}$$

Mais alors :

$$\cos^2(k\,\theta)+\sin^2(k\,\theta)\xrightarrow[k\to\infty]{}0^2+0^2=0,$$

ce qui **contredit** le fait que $\cos^2(k\,\theta)+\sin^2(k\,\theta)$ est constant égal à 1.

C'est donc que la suite $\big(\sin(k\,\theta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont la somme est f.

Solution. En $x=1$, la suite $\big(\sin(k\,\theta)\,1^k\big)_{k\in\mathbb{N}}=\big(u_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$:

- est bornée, donc $R\geqslant 1$;
- ne tend pas vers 0, donc $R\leqslant 1$.

Ainsi, $R=1$.

3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x\in\,]-R,R[$.

Solution. Soit $x\in\,]-1,1[$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\quad \sin(k\,\theta)\,x^k&=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta})\,x^k\\
&=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\,x^k\right)\qquad(\text{car } x^k\in\mathbb{R})\\
&=\mathrm{Im}\left((x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k\right).
\end{aligned}$$

La série géométrique complexe $\sum_{k\geqslant 0}(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k$ est convergente car $\left|x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|=|x|<1$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sin(k\,\theta)\,x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Im}\left((x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{(1-x\,\cos\theta)-\mathrm{i}\,x\,\sin\theta}\right)\\
&=\mathrm{Im}\left(\frac{(1-x\,\cos\theta)+\mathrm{i}\,x\,\sin\theta}{(1-x\,\cos\theta)^2+(x\,\sin\theta)^2}\right)\\
&=\frac{x\,\sin\theta}{1-2x\,\cos\theta+x^2}.
\end{aligned}$$

► 3 Mines-Télécom planche C

■ Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n\geqslant 1$ et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall i\in[\![1,\,n-1]\!],\ u(e_i)=e_{i+1}\quad\text{et}\quad u(e_n)=e_1.$$

1) Dans les cas $n=2$ et $n=3$, montrer que u est une isométrie et la caractériser géométriquement.

Solution. Dans les cas $n=2$ et $n=3$ les matrices de u sont respectivement

$$M_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont clairement orthogonales (leurs colonnes sont orthonormées) et comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, u est dans ces deux cas une isométrie.

Remarque. *Plus précisément, quand $n=2$ on reconnait la matrice de la symétrie d'axe Δ d'équation $y=x$, et quand $n=3$, $\det(M_3)=+1$ donc u est une rotation d'axe Δ dirigé par $u=e_1+e_2+e_3$, d'angle $2\pi/3$.*

2) Dans le cas général, u est-il une isométrie ?
Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

Solution. Dans le cas général, la matrice de u dans la base <u>orthonormée</u> $\mathscr{B}$ s'écrit :

$$M=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\1&\ddots&&\vdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}_{(n)}.$$

Les colonnes de cette matrice sont clairement orthonormées, donc $M\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et u est une isométrie.

Ensuite, en développant le déterminant de M par rapport à la première ligne :

$$\det(M) = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

u est donc une isométrie directe quand n est impair, et indirecte quand n est pair.

On suppose à présent que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que u est défini comme précédemment.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer le rang de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution.

- Le rang de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est le rang de sa matrice dans la base $\mathscr{B}$:

$$M - \lambda\,\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -\lambda & \\ (0) & & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{(n)}.$$

  Ce rang est supérieure ou égal à celui de la matrice obtenue en rayant 1re ligne et dernière colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)},$$

  matrice triangulaire de déterminant 1, donc inversible, donc de rang $(n-1)$.
  Ainsi, $\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \geqslant n-1$.
  Rappelons que $\mathrm{rg}(u - \lambda\,id_E) = n$ si et seulement si $\det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq 0$.
  Le calcul de ce déterminant (...) donne $\lambda^n - 1$, donc $\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = n$ si et seulement si $\lambda^n \neq 1$.

  Conclusion. $\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda^n \neq 1, \\ n-1 & \text{si } \lambda^n = 1. \end{cases}$

- D'après ce qui précède, les valeurs propres de u sont exactement les complexes λ tels que $\lambda^n = 1$. Il s'agit des racines n^{e} de l'unité. Comme il y en a n distinctes et que $\dim(E) = n$, cela suffit pour prouver que u est diagonalisable.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

4) Exprimer la matrice A à l'aide du polynôme P et d'une matrice plus simple.
La matrice A est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Solution. Toujours avec M, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on remarque que :

$$\begin{aligned} A &= a_0\,\mathrm{I}_n + a_1\,M + a_2\,M^2 + \cdots + a_{n-1}\,M^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,M^k \\ &= P(M). \end{aligned}$$

Puisque que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec pour valeurs propres les racines n^{e} de l'unité, il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$M = Q\,\underbrace{\mathrm{diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})}_{D}\,Q^{-1} \quad \text{où } \omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A = P(M) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,M^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(Q\,D\,Q^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,Q\,D^k\,Q^{-1} \\ &= Q\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\,D^k\right)Q^{-1} \\ &= Q\,\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,1^k,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\,\omega^k,\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\,(\omega^{n-1})^k\right)Q^{-1} \\ &= Q\,\mathrm{diag}\big(P(1),\ P(\omega),\ \ldots,\ P(\omega^{n-1})\big)\,Q^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont les $P(\omega^k)$ pour $k \in [\![0,\ n-1]\!]$.
Pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$:

- il est nécessaire que A soit réelle, donc que les a_k soient tous réels, et que A n'admette pas de valeur propre complexe non réelle. Il faut donc que tous les $P(\omega^k)$ soient réels.
- réciproquement, si les a_k et les $P(\omega^k)$ sont tous réels, A est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice D diagonale réelle. **On peut démontrer (mais ce n'est pas immédiat) que A est également semblable à D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.** On prouve ainsi que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Conclusion. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* tous les a_k et tous les $P(\omega^k)$ sont réels.

■ Exercice 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et g la fonction définie sur D par :

$$g(x, y) = \begin{cases} x\,y\,\ln(x^2 + y^2) & \text{si } 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{D}$.

Solution. Posons $\Omega := D \setminus \{(0, 0)\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrons que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
Par les théorèmes opératoires :

- $g_1 : (x, y) \mapsto x\,y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (fonction polynomiale) ;
- $g_2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ aussi, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$;
- $\ln : t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction usuelle) ;
- $g_3 := \ln \circ g_2 : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;
- et finalement $g = g_1 \times g_3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

2) Étudions les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
Par rapport à x : pour tout t non nul au voisinage de 0,

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \quad \text{limite finie.}$$

Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.
On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3) Montrons que les dérivées partielles sont continues sur Ω.
Sur Ω, cela a été fait à la première étape.
Reste la continuité en $(0,0)$.

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\,y\,\ln(x^2+y^2)\Big)\\ &= y\,\ln(x^2+y^2) + x\,y\,\frac{2x}{x^2+y^2}\\ &= y\,\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\Omega,\quad & \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\\ &= \left|\,y\,\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\,\right|\\ &= \left|\,r\,\sin(\theta)\,\ln(r^2) + \frac{2r^3\cos^2(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}\,\right|\\ &\leqslant 2\,\big|\,r\,\ln(r)\big| + 2\,r \xrightarrow[r\to 0^+]{\text{CC}} 0.\end{aligned}$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est bien continue en $(0,0)$.

On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ l'est aussi.

Conclusion. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur la totalité de D°.

2) Montrer que g admet des extrema globaux sur D.

Solution. D est la boule fermée unité pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
La fonction g est continue sur un fermé borné d'un EVN de dimension finie, à valeurs réelles. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum globaux sur D.

3) g admet-elle un extremum local en $(0,0)$?

Solution. ***Remarque.*** *La question se pose car on a vu que* $\nabla g(0,0) = (0,0)$ *: $(0,0)$ est un* point critique *de g.* En $\omega := (0,0)$, g vaut 0. Remarquons que, pour tout $t\in\,]0,1[$:

$$\begin{aligned} g(t,\ t) - g(\omega) &= t^2\,\ln(2\,t^2) < 0\\ g(t,\ -t) - (\omega) &= -t^2\,\ln(2\,t^2) > 0.\end{aligned}$$

Dans tout voisinage de $\omega = (0,0)$, on trouve donc des points m^+ tels que $g(m^+) - g(\omega) > 0$, et des points m^- tels que $g(m^-) - g(\omega) < 0$.
On en déduit qu'en ω, g n'admet pas d'extremum local.

4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de D ?

Solution. Le bord ∂D de D est le cercle de centre $\omega = (0,0)$ et de rayon 1, où $x^2+y^2 = 1$. Pour tout $m\in\partial D$, $g(m) = 0$; comme par ailleurs la fonction g prend des valeurs > 0 et des valeurs < 0, elle ne peut pas atteindre ses extrema globaux sur ∂D.