Planches INP (2)

► 1 INP planche D

■ Exercice majeur

1) Résoudre : $y'(x) + 2\pi x\, y(x) = 0$ et $y(0) = 1$.

Solution. L'équation différentielle est linéaire homogène du premier ordre, sans singularité. La fonction $a\colon x \mapsto 2\pi x$ a pour primitive $A\colon x \mapsto \pi x^2$ donc

$$\mathscr{S}(H) = \left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{-\pi x^2}\ ; A \in \mathbb{R}\right\}.$$

La seule solution y qui vérifie $y(0) = 1$ est celle pour $A = 1$.

Conclusion. L'unique solution de ce problème de Cauchy est $x \mapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$.

2) On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $b_n\colon t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution. b_n est c.p.m. sur $\mathbb{R}$; comme elle est paire/impaire, il suffit de prouver l'intégrabilité en $+\infty$. Or :

$$t^2 \times b_n(t) = t^{n+2} \exp(-\pi t^2) = (t^2)^{n/2+1} \exp(-\pi t^2) \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{CC}} 0.$$

On en tire que : $b_n = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, b_n l'est aussi, donc l'est sur $[0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ grâce à sa parité/imparité.

b. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. L'intégrale existe d'après la question précédente, et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} \exp\left(-(\sqrt{\pi}\,t)^2\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable affine $u = \sqrt{\pi}\,t$, pour lequel $\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,\mathrm{d}t$.
Quand $t = 0, u = 0$, et quand $t \to +\infty, u \to +\infty$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \exp\left(-(\sqrt{\pi}\,t)^2\right)(\sqrt{\pi}\,\mathrm{d}t)\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.\end{aligned}$$

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que B_n est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
Posons $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(t, x) \longmapsto b_n(t) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)$.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = (2\mathrm{i}\pi t)\, b_n(t) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t).$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont c.p.m. sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad |f(t, x)| = |b_n(t)|$$

et b_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après **Q2a**.

4) Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| = 2\pi\, |t\, b_n(t)|.$$

La fonction dominante $\phi\colon t \mapsto 2\pi\, |t\, b_n(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car paire et négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ (se prouve comme pour b_n, cf. **Q2a**).

Le théorème s'applique : la fonction B_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad B_n'(x) = 2\mathrm{i}\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, b_n(t) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\,\mathrm{d}t.$$

4) Montrer que : $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.

Solution. Pour calculer l'expression B_0, on cherche une équation différentielle dont elle serait solution. D'après la question précédente :

$$B_0'(x) = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi t \exp(-\pi t^2) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons une IPP dans l'intégrale généralisée. Posons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \begin{array}{ll} u'(t) = 2\pi t \exp(-\pi t^2) & v(t) = \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\\ u(t) = -\exp(-\pi t^2) & v'(t) = 2\mathrm{i}\pi x \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t).\end{array}$$

Les fonction u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$|u(t)\, v(t)| = \exp(-\pi t^2) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$

$$\text{d'où}\quad u(t)\, v(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0,\quad \text{limites finies.}$$

L'IPP est donc légitime et donne :

$$\begin{aligned}B_0'(x) &= \mathrm{i}\Bigg[\Big[-\exp(-\pi t^2) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\Big]_{-\infty}^{+\infty}\\ &\qquad + 2\mathrm{i}\pi x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) \exp(2\mathrm{i}\pi x\, t)\,\mathrm{d}t\Bigg]\\ &= -2\pi x\, B_0(x).\end{aligned}$$

B_0 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + 2\pi x\, y = 0$; de plus, $B_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$ d'après **Q2b**. B_0 est solution du problème de Cauchy de **Q1** ; on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad B_0(x) = \exp(-\pi x^2).$$

5) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme :

$$x \longmapsto P(x)\exp(-\pi x^2) \quad \text{où } P \in \mathbb{C}[X].$$

Montrer que toutes les fonctions B_n appartiennent à E.

Solution. Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Pour $n = 0$:** fait dans la question précédente, $P_0 := 1$ convient.
- **Pour $n = 1$:** on procède par IPP, comme pour B_0 (les justifications sont de même nature). On obtient :

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\pi t^2} \times \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{IPP}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi t^2} \times (2\mathrm{i}\pi x)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\,x\,B_0(x) = \mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}. \end{aligned}$$

  Le polynôme $P_1 := \mathrm{i}X$ convient.
- **Hérédité double.** Soit $n \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie aux rang $n-1$ et $n-2$. Montrons-la au rang n, toujours par IPP :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\pi t^2} \times t^{n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{IPP}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\pi t^2} \\ &\qquad \times \left((n-1)\,t^{n-2} + (2\mathrm{i}\pi x)\,t^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \frac{n-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \mathrm{i}\,x \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n-1}{2\pi}B_{n-2}(x) + \mathrm{i}\,x\,B_{n-1}(x) \\ &= \left(\mathrm{i}\,x\,P_{n-1}(x) + \frac{n-1}{2\pi}P_{n-2}(x)\right)\mathrm{e}^{-\pi x^2}. \end{aligned}$$

  Le polynôme $P_n(X) := \mathrm{i}X\,P_{n-1}(X) + \frac{n-1}{2\pi}P_{n-2}(X)$ convient.

■ Exercice mineur

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N urnes numérotées de 1 à N.

Dans l'urne i, il y a i boules numérotées de 1 à i.

On choisit au hasard, successivement, une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

1) Donner la loi de X.

Solution. Notons U la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne choisie, de sorte que U suit la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$,
et que conditionnellement à $[U=n]$, X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Clairement, $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$, et pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engendré par U :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(U=n)\,\underbrace{\mathrm{P}_{[U=n]}(X=k)}_{=1/n \text{ si } k\leqslant n,\ =0 \text{ sinon}} \\ &= \sum_{n=k}^{N}\frac{1}{N}\times\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Rem. *Cette somme, qui est une tranche de la série harmonique, ne se simplifie pas.*

2) Déterminer l'espérance de X.

Solution. La variable X est réelle finie, donc elle admet une espérance finie, donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{N}\times\sum_{n=1}^{N}\frac{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{N}\times N\,\frac{\frac{1+1}{2}+\frac{N+1}{2}}{2} \\ &= \frac{N+3}{4}. \end{aligned}$$

▶ 2 INP planche E

■ Exercice majeur

1) On pose $P = X^2 - 2X + 1$ et $Q = P + P' + P''$. Vérifier que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et que Q y est strictement positive.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0 \\ Q(x) &= (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1 \geqslant 1 > 0. \end{aligned}$$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que la fonction P est positive sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}.$$

a. Exprimer Q'.

Solution. $Q' = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{2n+1} P^{(k)}$,
mais puisque $\deg(P) \leqslant 2n$, $P^{(2n+1)} = 0$,
donc $Q' = \sum_{k=1}^{2n} P^{(k)} = Q - P^{(0)} = Q - P$.

b. À l'aide de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}Q(t)$, montrer que la fonction Q est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R},\quad g'(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(-Q(t) + Q'(t)\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-t}P(t) \leqslant 0. \end{aligned}$$

La fonction g est donc décroissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$:

$$P(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(t^{2n}\right), \quad \text{d'où} \quad g(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t}\right).$$

Par croissances comparées, $t^{2n}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$,
donc $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ également.

Puisque g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{+\infty}(g) = 0$, $g(t) \geqslant 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$.

Par l'absurde, supposons que g s'annule en un point $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors g serait identiquement nulle sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, donc $g' = 0$ sur $]t_0, +\infty[$. En multipliant par e^t, on en déduit que P serait nul sur $]t_0, +\infty[$, donc aurait une infinité de racines : ce serait le polynôme nul, **ce qui contredit l'hypothèse sur P.**

On en déduit que $g(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc que $Q(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{2n} (P\,Q)^{(k)}(0).$$

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.

Solution. Posons $\phi : (P, Q) \mapsto (P \mid Q)$.

1) $\phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est correctement défini.
2) ϕ est symétrique car le produit de polynômes est commutatif.
3) ϕ est linéaire à gauche grâce à la linéarité de la dérivation, de l'évaluation en 0 et de la sommation. ϕ est donc bilinéaire.
4) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ **non nul,** on a

$$\phi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n} (P^2)^{(k)}(0).$$

Le polynôme P^2 est non nul, positif sur $\mathbb{R}$.
D'après **Q2b** avec P^2 dans le rôle de P, $\phi(P, P) > 0$.
Ceci prouve directement que ϕ est définie positive : si $P = 0$, évidemment que $\phi(P, P) = 0$, donc on a $\phi(P, P) \geqslant 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$
et le seul cas où $\phi(P, P) = 0$ est lorsque $P = 0$.

b. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution. Nous allons orthogonaliser la base $(P_0, P_1) := (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt.
Avant cela, remarquons que pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
&\left(X^i \,\middle|\, X^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(X^{i+j}\right)^{(k)}(0) \\
&= \left(X^{i+j} + (i+j)X^{i+j-1} + \cdots + \frac{(i+j)!}{1!} X + (i+j)!\right)(0) \\
&= (i+j)!.
\end{aligned}$$

Orthogonalisons la famille :

- On pose : $Q_0 := P_0 = 1$,
  de sorte que : $\|Q_0\|^2 = \left(X^0 \,\middle|\, X^0\right) = (0+0)! = 1$.
- On redresse P_1 :

$$\begin{aligned}
\widehat{P_1} &:= P_1 - \frac{(P_1 \mid Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0 = X - (X \mid 1) \\
&= X - (1+0)! = X - 1.
\end{aligned}$$

On pose $Q_1 := X - 1$ et :

$$\begin{aligned}
\|Q_1\|^2 &= \|X - 1\|^2 = \|X\|^2 - 2\,(X \mid 1) + \|1\|^2 \\
&= 2! - 2 \cdot 1! + 0! = 1.
\end{aligned}$$

Bilan : $P_0 = 1 \quad Q_0 = 1 \quad \|Q_0\|^2 = 1$
$P_1 = X \quad Q_1 = X - 1 \quad \|Q_1\|^2 = 1.$

La famille $(Q_0, Q_1) = (1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

c. Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
Ce nombre est noté u_n.

Solution. Grâce à la base **orthonormée** (Q_0, Q_1) de $\mathbb{R}_1[X]$, on calcule le projeté orthogonal de X^n sur cet espace :

$$\begin{aligned}
p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^n) &= (X^n \mid Q_0)\, Q_0 + (X^n \mid Q_1)\, Q_1 \\
&= (X^n \mid 1)\, Q_0 + (X^n \mid X - 1)\, Q_1 \\
&= n!\, Q_0 + \big((X^n \mid X) - (X^n \mid 1)\big)\, Q_1 \\
&= n!\, Q_0 + \big((n+1)! - n!\big)\, Q_1 \\
&= n!\, Q_0 + (n \cdot n!)\, Q_1.
\end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned}
u_n = \mathrm{d}\big(X^n, \mathbb{R}_1[X]\big) &= \sqrt{\|X^n\|^2 - \left\| p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^n) \right\|^2} \\
&= \sqrt{(2n)! - \big((n!)^2 + (n \cdot n!)^2\big)}
\end{aligned}$$

car (Q_0, Q_1) est une famille orthonormée.
Finalement :

$$u_n = \sqrt{(2n)! - (n^2+1) \cdot (n!)^2}.$$

4) Étudier la nature de la série de terme général $(u_n)^{-1/n}$.
Pour cela, on donne le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n\,\ln(n) - n + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(n).$$

Solution. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
(u_n)^{-1/n} &= \Big[(2n)! - (n^2+1) \cdot (n!)^2\Big]^{-\frac{1}{2n}} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n} \ln\Big[(2n)! - (n^2+1) \cdot (n!)^2\Big]\right).
\end{aligned}$$

Dans l'argument du logarithme, regardons lequel des deux termes est prépondérant en cherchant un équivalent de leur rapport :

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{(n^2+1) \cdot (n!)^2} &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\, \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n^2 \cdot \left(\sqrt{2\pi n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}\, 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{n^2 \cdot (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cdot 4^n}{\sqrt{\pi} \cdot n^{5/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}} +\infty.
\end{aligned}$$

C'est $(2n)!$ qui l'emporte. On factorise de force par ce terme dans l'argument du logarithme :

$$\begin{aligned}
(u_n)^{-1/n} &= \exp\left(-\frac{1}{2n} \ln\left[(2n)! \times \left(1 - \frac{(n^2+1) \cdot (n!)^2}{(2n)!}\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n} \left[\ln\big((2n)!\big) + \ln\left(1 - \frac{(n^2+1) \cdot (n!)^2}{(2n)!}\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n} \Big[\ln\big((2n)!\big) + \mathrm{o}(1)\Big]\right).
\end{aligned}$$

On utilise alors le développement asymptotique rappelé, avec le changement de variable $n \leftarrow 2n$:

$$(u_n)^{-1/n} = \exp\left(-\frac{1}{2n} \Big[(2n)\ln(2n) - (2n) + \underbrace{\mathrm{o}(2n) + \mathrm{o}(1)}_{=\mathrm{o}(n)}\Big]\right)$$

$$= \exp\big(-\ln(2n)+1+\mathrm{o}(1)\big)$$
$$= \frac{\mathrm{e}}{2n} \times \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}}{2n}$ est divergente (multiple de la série harmonique) et à termes positifs, on en conclut que $\sum_{n\geqslant 1} (u_n)^{-1/n}$ est divergente.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Sa somme est notée f.

Solution. **Fixons $x \in \mathbb{R}$ et prouvons la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.**

Puisque $\arctan(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et que $\frac{x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{x}{n^{3/2}}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^{3/2}}$ est à termes positifs et elle est convergente (mult. de série de Riemann d'expo. $\alpha = 3/2 > 1$) ; il en est de même pour $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. On applique le théorème de continuité de la somme :

1) Toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

2) Prouvons que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment $[-a, a]$.

L'imparité de la fonction f_n montre que

$$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = \|f_n\|_\infty^{[0,a]}.$$

De plus, sur $[0, a]$, f_n croit de $f_n(0) = 0$ à $f_n(a) \geqslant 0$.
Par conséquent :

$$\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = f_n(a) = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a}{n^{3/2}}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[-a,a]}$ converge, comme pour la convergence simple.

Le théorème s'applique : la somme f de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. *Il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$ car $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \pi/(2n)$.*

► 3 INP planche F

■ Exercice majeur

Soit S l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$y''(x) - (x^4+1)\, y(x) = 0.$$

On pose f l'unique élément de S vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Par la définition des sous-espaces vectoriels :

1) $S \subset \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel de référence ;

2) La fonction nulle $t \mapsto 0$ est solution de (E) car cette équation est homogène : $(t \mapsto 0) \in S$ donc $S \neq \varnothing$.

3) Montrons que S est stable par combinaison linéaire.
Soit $y_1, y_2 \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $y := \alpha\, y_1 + \beta\, y_2$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&y''(x) - (x^4+1)\, y(x)\\
&\quad= (\alpha\, y_1 + \beta\, y_2)''(x) - (x^4+1)\,(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2)(x)\\
&\quad= \big(\alpha\, y_1''(x) + \beta\, y_2''(x)\big) - (x^4+1)\,\big(\alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x)\big) \qquad \text{(linéarité de la dérivation)}\\
&\quad= \alpha\,\big(y_1''(x) + (x^4+1)\, y_1(x)\big) + \beta\,\big(y_1''(x) + (x^4+1)\, y_1(x)\big)\\
&\quad= 0 \qquad \text{car } y_1, y_2 \in S.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $y = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 \in S$.

2) Soit $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \big(f(x)\big)^2$.
Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Solution. On a : $g(0) = f^2(0) = 1^2 = 1$
$g'(x) = 2 f(x) f'(x)$ donc $g'(0) = 0$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) \geqslant 0$.

Solution. On dérive g une fois de plus (g, comme f, est au moins de classe $\mathscr{C}^2$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(2 f(x) f'(x)\big) = 2\Big[\big(f'(x)\big)^2 + f(x) f''(x)\Big],$$

mais $f \in S$, donc :

$$g''(x) = 2\Big[\big(f'(x)\big)^2 + (1+x^4)\big(f(x)\big)^2\Big] \geqslant 0.$$

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \big(f(x)\big)^2 \geqslant 1$.

Solution. De la question précédente, on tire successivement :

- g' est croissante sur $\mathbb{R}$;
- sur $\mathbb{R}_+$: $g' \geqslant g'(0) = 0$;
- g est croissante sur $\mathbb{R}_+$;
- sur $\mathbb{R}_+$: $g \geqslant g(0) = 1$ c.à.d. $\forall x \geqslant 0,\ f^2(x) \geqslant 1$.

5) Posons : $h(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que h est bien définie et que $h \in S$.

Solution.

- **Bonne définition de g.** Si $x \geqslant 0$, la fonction g est continue et $\geqslant 1$ sur le segment $[0, x]$ d'après la question précédente. Le dénominateur de la fraction sous l'intégrale ne peut pas s'annuler : on intègre une fonction continue sur un segment, ce qui est légitime.
  Si $x < 0$, il faut s'assurer que la fonction g ne s'annule pas sur le segment $[x, 0] \subset \mathbb{R}_-$. On reprend le raisonnement de la question précédente en l'adaptant : g' est croissante sur $\mathbb{R}_-$, donc majorée par $g'(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; elle y est négative ; g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc minorée par $g(0) = 1$: on a ici aussi $g(t) \geqslant 1$ pour tout $t \leqslant 0$.
  L'intégrale définissant $h(x)$ existe donc quand $x < 0$.

- ***h* est solution de l'équation.**
La fonction $\Phi\colon x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\frac{1}{g}$. Cette dernière étant de classe $\mathscr{C}^1$, Φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par produit, h aussi.
Calculons sa dérivée seconde, par exemple par la formule de dérivation de Leibniz : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}\right) \\ &= f''(x) \times \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} + 2f'(x) \times \frac{1}{g(x)} \\ &\qquad\qquad + f(x) \times -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= (1+x^4)f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} + 2\,\frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ &\qquad\qquad - f(x) \times \frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)} \\ &= (1+x^4)h(x). \end{aligned}$$
Ceci prouve que $h \in S$.

6) Montrer que (f,h) est une base de S.

Solution. Comme (E) est une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 2 et **sans singularité**, le cours dit que S est un espace vectoriel de dimension 2.
f et h sont 2 vecteurs de S ; pour qu'ils en forment une base, il suffit qu'ils forment une famille libre : **montrons-le.**
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta h = (x \mapsto 0)$.
En évaluant en $x = 0$, on obtient $\alpha f(0) + \beta h(0) = 0$;
comme $f(0) = 1$ et que $h(0) = 0$, on obtient $\alpha = 0$.
βh est la fonction nulle, donc $\beta h'$ aussi, et $\beta h'(0) = 0$.
Mais $h'(0) = \cdots = 1$, donc $\beta = 0$ également.
Conclusion. La famille (f,h) est bien libre, donc c'est une base de S.

■ Exercice mineur

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Donner le polynôme caractéristique de $M(z)$.

Solution. Une fois n'est pas coutume, on développe le déterminant sans trop se poser de questions, car il n'y aura pas de factorisation intéressante.
Par exemple, par la règle de Sarrus :
$$\begin{aligned} \chi_{M(z)} &= \begin{vmatrix} X & -z & -z \\ -1 & X & -z \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= +\left(X^3 - z^2 - z\right) - (zX + zX + zX) \\ &= X^3 - 3zX - (z^2 + z). \end{aligned}$$

Rappel. *À partir du degré 3, vous ne connaissez pas de méthode générale pour factoriser les polynômes : il faut pour y arriver avec des racines évidentes ou des identités remarquables. Ces méthodes existent pour les polynômes de degré 3 et 4 (méthode de Cardan et de Ferrari), mais vous n'êtes pas censé les connaître. À partir du degré 5, Galois a démontré qu'il était vain de chercher une méthode générale.*

2) Pour quelles valeurs de z la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable ?

Solution. Le polynôme caractéristique $\chi := \chi_{M(z)}$ est de toute façon scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
Si toutes ses racines sont simples, $M(z)$ est automatiquement diagonalisable.
Cherchons les valeurs de z pour lesquelles $M(z)$ n'est pas diagonalisable, par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons $M(z)$ non diagonalisable.
Alors χ admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ d'ordre au moins 2.
Elle vérifie $\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0$.
Grâce à la dérivée : $\quad 3\lambda^2 - 3z = 0$ donc $z = \lambda^2$.
L'égalité $\chi(\lambda) = 0$ se réécrit donc :
$$\lambda^3 - 3\lambda^3 - (\lambda^4 + \lambda^2) = 0 \quad \text{d'où} \quad -\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$
$$\text{soit} \quad -\lambda^2(\lambda+1)^2 = 0.$$
Nécessairement : $\quad \lambda = 0$ ou $\lambda = -1$;
donc : $\quad z = 0^2 = 0$ ou $z = (-1)^2 = 1$.
Bilan : $\quad M(z)$ est toujours diagonalisable, sauf peut-être si $z = 0$ ou $z = 1$.

- **Synthèse.** On étudie les deux cas restants :
  * **Si $z = 0$,** alors $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  Cette matrice est triangulaire, de spectre $\{0\}$; si elle était diagonalisable, elle serait nulle.
  Quand $z = 0$, $M(z)$ n'est pas diagonalisable.
  * **Si $z = 1$,** alors $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  $M(z)$ est symétrique réelle, donc **diagonalisable** par le théorème spectral.

- **Conclusion.** $M(z)$ est diagonalisable *si et seulement si* $z \neq 0$.