Planches INP (1)

▶ 1 Planche INP A

■ Exercice majeur

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on pose

$$f^0 = \mathrm{id}_E \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^k = f \circ f^{k-1}.$$

On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un *endomorphisme cyclique* s'il existe $e_1 \in E$ tel que

$$\big(e_1,\, f(e_1),\, \ldots,\, f^{n-1}(e_1)\big) \text{ est une base de } E.$$

1) On suppose ici que $n = 3$. On note $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f^2)$.

Solution. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que f est cyclique.

Solution. Prenons e_3 le **troisième** vecteur de la base $\mathscr{B}$. $\mathscr{F} := \big(e_3, f(e_3), f^2(e_3)\big)$ est une base de E car elle a le bon nombre de vecteurs et :

$$\underset{\mathscr{B}}{\det}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

f est donc cyclique.

2) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que :

$$f : \quad P \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

a. Soit $Q \in E$ tel que $\deg(Q) \geqslant 1$.
Montrer que : $\deg\big(f(Q)\big) = \deg(Q) - 1$.
En déduire que f n'est pas bijectif.

Solution.

- Soit $Q \in E$ tel que $d := \deg(Q) \geqslant 1$.
  Écrivons $Q = \alpha X^d + \beta X^{d-1} + R$, où $\alpha \neq 0$ et $\deg(R) < d-1$. Alors :

  $$\begin{aligned} f(Q) &= Q(X+1) - Q(X) \\ &= \alpha\left((X+1)^d - X^d\right) + \beta\left((X+1)^{d-1} - X^{d-1}\right) \\ &\quad + R(X+1) - R(X). \end{aligned}$$

  On développe à l'aide du binôme de Newton. Les termes de degré d disparaissent. Au degré $d-1$, on a :

  $$\alpha \,.\, d X^{d-1} + \beta\left(X^{d-1} - X^{d-1}\right) = (\alpha\, d) X^{d-1}.$$

  Les autres termes sont de degré $< d-1$. Comme $\alpha\, d \neq 0$, on a $\deg\big(f(P)\big) = d - 1 = \deg(P) - 1$.
- Soit $Q \in E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$:
  - $*$ si $\deg(Q) \geqslant 1$: $\deg\big(f(Q)\big) = \deg(Q) - 1 \leqslant n-2$;
  - $*$ si $\deg(Q) < 1$: Q est un polynôme constant donc $f(Q) = 0$ et $\deg\big(f(Q)\big) = -\infty$.

  Dans tous les cas, $\deg f(Q) \neq n-1$ donc $f(Q) \neq X^{n-1}$: le polynôme $X^{n-1} \in E$ n'a pas d'antécédent par f.
  f n'est pas surjective, donc pas bijective.

b. f est-il cyclique ?
Indication : *calculer* $\deg\big(f^j(X^{n-1})\big)$.

Solution. Remarquons que :

$$\begin{aligned} &\deg(X^{n-1}) = n-1, \\ &\deg\big(f(X^{n-1})\big) = n-2, \\ &\deg\big(f^2(X^{n-1})\big) = n-3, \\ &\quad\vdots \\ &\deg\big(f^{n-1}(X^{n-1})\big) = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{F} := \big(X^{n-1},\, f(X^{n-1}),\, \ldots,\, f^{n-1}(X^{n-1})\big)$ est une famille de polynômes de degrés tous différents ne contenant pas le polynôme nul : elle est libre.
De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$ donc c'est une base de E.
L'endomorphisme f est donc cyclique.

3) On suppose ici que $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que $\mathrm{Ker}(f^n) = E$.

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

Solution. Comme $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \neq E$ et que, par définition du noyau, $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subset E$, c'est que $E \not\subset \mathrm{Ker}(f^{n-1})$: il existe un élément x_0 de E qui ne se trouve pas dans $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$, c.à.d. tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

b. Montrer que f est cyclique.

Solution. Prenons $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Montrons que la famille

$$\mathscr{F} := \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$$

est une base de E. Comme elle a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre.
Soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0_E. \qquad (*)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f^n) = E$, $f^n(x_0) = 0_E$, donc $f^j(x_0) = 0_E$ pour tout entier $j \geqslant n$.
En appliquant f^{n-1} à $(*)$, il ne reste que $\alpha_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$; comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient $\alpha_0 \neq 0$.
Le premier terme de $(*)$ disparait ; en appliquant f^{n-2}, on obtient $\alpha_1 f^{n-1}(x_0) = 0_E$, d'où $\alpha_1 = 0$.
En itérant le procédé, on annule successivement tous les α_i. La famille $\mathscr{F}$ est bien libre, ce qui achève la preuve.

4) On suppose ici f cyclique.
Montrer que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Solution. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On sait que :

$$\dim\big(E_\lambda(f)\big) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E).$$

Prenons un vecteur e_1 de f tel que $\mathscr{B} := \big(f^j(e_1)\big)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$ soit une base de E.

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f-\lambda\,\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & *-\lambda \end{pmatrix}_{(n)}.$$

Le rang de cette matrice est supérieur ou égal à celui de la sous-matrice obtenue en rayant la 1re ligne et la dernière colonne, soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)}.$$

Cette dernière matrice est clairement de rang $n-1$.
Ainsi $\mathrm{rg}(f-\lambda\,\mathrm{id}_E) \geqslant n-1$ d'où $\dim\big(E_\lambda(f)\big) \leqslant 1$.

5) On suppose ici f diagonalisable.
Montrer que f est cyclique *si et seulement si* ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Solution. Supposons f diagonalisable.

[$\Rightarrow$] Démontré par **Q4**.

[$\Leftarrow$] Supposons les SEP de dimension 1. Comme f est diagonalisable, prenons une base de vecteurs propres $\mathscr{B} := (v_1, \dots, v_n)$, associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, toutes différentes car les SEP sont de dimension 1.
Posons $e = v_1 + \cdots + v_n$. Par récurrence sur j, on prouve :

$$\forall\, j \in [\![0,\, n-1]\!], \quad f^j(e) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^j\, v_j.$$

La matrice de la famille $\big(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice de Vandermonde $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Comme les λ_i sont tous différents, cette matrice est de déterminant non nul, ce qui prouve que la famille est une base de E. Ainsi, f est cyclique.

■ Exercice mineur

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathscr{P}(a) \;\text{ et }\; Y \hookrightarrow \mathscr{P}(b).$$

1) Déterminer la loi de $X+Y$ de deux manières différentes.

Solution.

- **1re méthode :** par la fonction génératrice. On connait les fonctions génératrices de X et Y :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_X(t) = \mathrm{e}^{a\,(t-1)} \;\text{ et }\; \mathrm{G}_Y(t) = \mathrm{e}^{b\,(t-1)}.$$

Puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad \mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t) \times \mathrm{G}_Y(t) = \mathrm{e}^{(a+b)\,(t-1)}.$$

On reconnait la fonction génératrice associée à la loi $\mathscr{P}(a+b)$: cela prouve que $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(a+b)$.

- **2e méthode :** par calcul direct.
Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Prenons $n \in \mathbb{N}$ et calculons $\mathrm{P}(X+Y=n)$.
On décompose l'événement $[X+Y=n]$ sur le s.c.e. engendré par X :

$$\begin{aligned} [X+Y=n] &= \biguplus_{k=0}^{\infty} \Big([X=k] \cap [X+Y=n]\Big) \\ &= \biguplus_{k=0}^{\infty} \Big([X=k] \cap \underbrace{[Y=n-k]}_{=\varnothing \text{ si } k>n}\Big) \\ &= \biguplus_{k=0}^{n} \big([X=k] \cap [Y=n-k]\big). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X+Y=n) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\big([X=k] \cap [Y=n-k]\big) && \text{(additivité)} \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) \times \mathrm{P}(Y=n-k) && (X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-a}\,\frac{a^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-b}\,\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} && \text{(déf. lois de Poisson)} \\ &\quad = \frac{\mathrm{e}^{-(a+b)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\ &\quad = \frac{\mathrm{e}^{-(a+b)}}{n!}\,(a+b)^n. && \text{(binôme de Newton)} \end{aligned}$$

On obtient : $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(a+b)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnellement à $[X+Y=n]$.

Solution. Sous l'hypothèse que $X(\omega) + Y(\omega) = n$, puisque $0 \leqslant X(\omega) \leqslant X(\omega) + Y(\omega)$, la variable X prend une valeur de $[\![0, n]\!]$; comme il est possible que $Y(\omega) = 0$, toutes ces valeurs sont effectivement prises par X.
Ainsi : $\boldsymbol{X\big([X+Y]=n\big) = [\![0, n]\!]}$.
De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{[X+Y=n]}(X=k) &= \frac{\mathrm{P}\,(X=k,\;X+Y=n)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}\,(X=k,\;Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X=k) \times \mathrm{P}(Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-a}\,a^k/k! \times \mathrm{e}^{-b}\,b^k/k!}{\mathrm{e}^{-(a+b)(a+b)^n}/n!} \\ &= \binom{n}{k} \frac{a^k\,b^{n-k}}{(a+b)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\tfrac{a}{a+b}\right)^k \left(1 - \tfrac{a}{a+b}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Conclusion : $X \underset{[X+Y=n]}{\longleftrightarrow} \mathscr{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$

3) On suppose que $c > 0$ et $p \in [0,1]$ sont deux constantes, X et Z deux variables aléatoires telles que $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(c)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[Z=n]$, X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Montrer que X et $Z-X$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois.

Solution. Posons $Y := Z-X$. Les lois conditionnelles de X montrent que : $\forall\,\omega\in\Omega,\ 0\leqslant X(\omega)\leqslant Z(\omega)$, donc $Y(\omega)\geqslant 0$. Finalement, X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Posons $q := 1-p$; pour tous $k,\ell\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k,\ Y=\ell) &= \mathrm{P}(X=k,\ Z=k+\ell)\\
&= \mathrm{P}(Z=k+\ell)\times \mathrm{P}_{[Z=k+\ell]}(X=k)\\
&= \mathrm{e}^{-c}\,\frac{c^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\times\binom{k+\ell}{k}p^k q^\ell\\
&= \mathrm{e}^{-(p+q)c}\,\frac{c^k\,c^\ell}{k!\,\ell!}\,p^k q^\ell\\
&= \left(\mathrm{e}^{-pc}\,\frac{(p\,c)^k}{k!}\right)\times\left(\mathrm{e}^{-qc}\,\frac{(q\,c)^\ell}{\ell!}\right).
\end{aligned}$$

Ceci prouve d'un seul coup que (X,Y) est un couple de variables indépendantes, de lois respectives $\mathscr{P}(p\,c)$ et $\mathscr{P}(q\,c)$.

► 2 Planche INP B

■ Exercice majeur

Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x)=\frac{\alpha^n}{n!}\cos(n\,x)\ \text{ puis }\ U(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x).$$

1) Donner le DSE de exp et son rayon de convergence.

Solution. Le DSE de l'exponentielle complexe a pour rayon de convergence $R=+\infty$, et

$$\forall\,z\in\mathbb{C},\quad \exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

2) Montrer que $U(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Solution. Il s'agit de prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. On a:

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant|u_n(x)|\leqslant\frac{|\alpha|^n}{n!}$$

Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{|\alpha|^n}{n!}$ est convergente, par théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

3) Montrer que U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(sans calculer U)

Solution. On applique le théorème de dérivation terme à terme :

- Toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (ce sont des fonctions sinusoïdales) et :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,x\in\mathbb{R},\quad u_n'(x)=-\frac{n\,\alpha^n}{n!}\sin(n\,x)=\begin{cases}0 & \text{si } n=0\\ -\dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x) & \text{si } n\geqslant 1.\end{cases}$$

- $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **Q2**;
- Montrons que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

  Clairement, $\left\|u_0'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}=0$. Pour $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\forall\,x\in\mathbb{R},\quad \left|u_n'(x)\right| &= \left|-\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x)\right|\\
&\leqslant \frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}\qquad\text{indép. de } x,
\end{aligned}$$

$$\text{donc}\quad \left\|u_n'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}\leqslant\frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}.$$

  Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{|\alpha|^n}{(n-1)!}=|\alpha|\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{|\alpha|^{n-1}}{(n-1)!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left\|u_n'\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ aussi : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique ; $U\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et :

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad U'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\sin(n\,x).$$

4) Montrer que :

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad U(x)=\exp\big(\alpha\,\cos(x)\big)\cos\big(\alpha\,\sin(x)\big).$$

Solution. Utilisons que :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,x\in\mathbb{R},\quad u_n(x)=\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha^n}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right).$$

La série exponentielle complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}$ est convergente, donc pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n}{n!}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\Big(\exp\big(\alpha\,\cos(x)+\mathrm{i}\,\alpha\,\sin(x)\big)\Big)\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sin(x)}\right)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sin(x)}\right)\qquad\text{car } \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\in\mathbb{R}_+^*,\\
&= \mathrm{e}^{\alpha\cos(x)}\cos\big(\alpha\,\sin(x)\big).
\end{aligned}$$

On pose : $\displaystyle V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\cos^2(n\,x)}{n!}.$

5) Montrer que V est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer V.

Solution. Il s'agit de prouver la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ où $v_n : x\mapsto\frac{\alpha^n\cos^2(n\,x)}{n!}$.

On fixe $x\in\mathbb{R}$ et on linéarise le $\cos^2$:

$$\begin{aligned}
\forall\,n\in\mathbb{N},\quad v_n(x) &= \frac{\alpha^n\left(\frac{\cos(2n\,x)+1}{2}\right)}{n!}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n\cos(n\,(2x))}{n!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On obtient une combinaison linéaire de deux termes généraux de séries convergentes. Par linéarité de la sommation de série, $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n(x)$ converge et :

$$V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \cos(n(2x))}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2} U(2x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha\cos(2x)}\cos\big(\alpha\sin(2x)\big) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

On pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,U(x)\,\mathrm{d}x.$

6) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Solution. Fixons $n \geqslant 1$ et procédons à une IPP sur le segment $[-\pi,\pi]$. Posons, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$:

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \cos(nx), & v(x) &= U(x),\\
u(x) &= \frac{1}{n}\sin(nx), & v'(x) &= U'(x).
\end{aligned}
$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le **segment** $[-\pi,\pi]$ donc l'IPP est légitime, et :

$$
\begin{aligned}
I_n &= \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\times U(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,U'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,U'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

La fonction U' est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, donc elle y est bornée par le théorème des bornes. Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$
\begin{aligned}
|I_n| &\leqslant \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\big|\sin(nx)\,U'(x)\big|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\big\|U'\big\|_{\infty}^{[-\pi,\pi]}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2\pi\,\|U'\|_{\infty}^{[-\pi,\pi]}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Par le théorème d'encadrement, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

7) Calculer I_n.

Solution. Par la définition de $U(x)$:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,U(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\alpha^k}{k!}\cos(nx)\cos(kx)}_{v_{n,k}(x)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Les fonctions $v_{n,k}$ sont continues sur le **segment** $[-\pi,\pi]$ et on montre sans peine que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_{n,k}$ converge normalement, donc uniformément sur ce segment. Cela autorise à intervertir $\sum$ et $\int$:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\big((n+k)x\big)+\cos\big((n-k)x\big)}{2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

On montre que :

$$
\forall p\in\mathbb{Z},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } p\neq 0\\ 2\pi & \text{si } p = 0.\end{cases}
$$

Pour I_0, il ne reste que le terme pour $k=0$:

$$
I_0 = \frac{\alpha^0}{0!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\pi,
$$

et pour chaque $n\geqslant 1$, il ne reste que le terme pour $k=n$:

$$
I_n = \frac{\alpha^n}{n!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\,\frac{\alpha^n}{n!}.
$$

Conclusion : $\quad I_n = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0,\\ \pi\,\dfrac{\alpha^n}{n!} & \text{si } n\geqslant 1.\end{cases}$

■ Exercice mineur

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, A la matrice de E définie par :

$$
A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.
$$

On pose $\varphi_A\colon\ E\to E,\ M\mapsto AM - MA$.

1) Déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi_A)$ et étudier la diagonalisabilité de φ_A.

Solution. Calculons la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{can}} := (E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ de $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(E_{1,1}) &= \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = 0_E\\
\varphi_A(E_{1,2}) &= \left(\begin{smallmatrix}0 & \lambda_1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0 & \lambda_2\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = (\lambda_1-\lambda_2)E_{1,2}\\
\varphi_A(E_{2,1}) &= \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \lambda_2 & 0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ \lambda_1 & 0\end{smallmatrix}\right) = (\lambda_2-\lambda_1)E_{2,1}\\
\varphi_A(E_{2,2}) &= \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right) = 0_E.
\end{aligned}
$$

Ainsi : $\quad \underset{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}{\mathrm{mat}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda_1-\lambda_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda_2-\lambda_1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Cette matrice est diagonale, donc φ_A est diagonalisable et

$$
\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{0,\ \lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_1\}.
$$

2) Généraliser ces résultats au cas où A est une matrice diagonalisable d'ordre 2.

Solution. Prenons $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable : il existe une matrice $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que $A = PDP^{-1}$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$.
Notons $E'_{i,j} := P\,E_{i,j}\,P^{-1}$ pour tout $i,j\in\{1,2\}$.
Constatons que les matrices $E'_{i,j}$ forment une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de φ_A. Par exemple :

$$
\begin{aligned}
\varphi_A(E'_{1,2}) &= (PDP^{-1})(P\,E_{1,2}\,P^{-1})\\
&\quad - (P\,E_{1,2})(PDP^{-1})\\
&= P\,\big(D\,E_{1,2} - E_{1,2}\,D\big)\,P^{-1}\\
&= P\,\big((\lambda_1-\lambda_2)E_{1,2}\big)\,P^{-1} \qquad \text{d'après } \mathbf{Q1}\\
&= (\lambda_1-\lambda_2)E'_{1,2}.
\end{aligned}
$$

On montre de même que $\varphi_A(E'_{1,1}) = \varphi_A(E'_{2,2}) = 0_E$, et que $\varphi_A(E'_{2,1}) = (\lambda_2-\lambda_1)E'_{2,1}$.
Reste à s'assurer que la famille des $E'_{i,j}$ reste une base de E : elle a le bon nombre de vecteurs et elle est libre puisque :

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\alpha_{i,j}\,E'_{i,j} = 0_E &\implies P\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\alpha_{i,j}\,E_{i,j}\right)P^{-1} = 0_E\\
&\implies \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\alpha_{i,j}\,E_{i,j} = 0_E\\
&\implies \forall\, i,j\in[\![1,2]\!],\ \ \alpha_{i,j} = 0.
\end{aligned}
$$

Conclusion : φ_A est diagonalisable,
et $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \big\{0,\ \lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_1\big\}$.

3) Traiter le cas où $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Solution. On écrit la matrice de A dans la base canonique ; pour $M=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}\varphi_A(M)&=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\lambda x+z & \lambda y+t\\ \lambda z & \lambda t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda x & x+\lambda y\\ \lambda z & z+\lambda t\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}z & t-x\\ 0 & -z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On on déduit que : $\underset{\mathscr{B}_{\text{can}}}{\operatorname{mat}}(\varphi_A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\begin{aligned}\chi&=\begin{vmatrix}X & 0 & -1 & 0\\ 1 & X & 0 & -1\\ 0 & 0 & X & 0\\ 0 & 0 & 1 & X\end{vmatrix}=X\begin{vmatrix}X & -1 & 0\\ 0 & X & 0\\ 0 & 1 & X\end{vmatrix}=X^2\begin{vmatrix}X & 0\\ 1 & X\end{vmatrix}\\ &=X^4.\end{aligned}$$

La seule valeur propre réelle de φ_A est 0. Si φ_A était diagonalisable, ce serait l'endomorphisme nul, or ce n'est pas le cas.

Conclusion. $\operatorname{Sp}(\varphi_A)=\{0\}$ et φ_A n'est pas diagonalisable.

► 3 Planche INP C

■ Exercice majeur

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) On note F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, stable par produit. Donner la dimension de F.

Solution. L'ensemble F s'écrit :

$$\begin{aligned}F&=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & t\end{pmatrix};(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &=\left\{x\,E_{1,1}+y\,E_{1,2}+z\,E_{2,2};(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &=\operatorname{Vect}\left(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{2,2}\right).\end{aligned}$$

Cela prouve que F est un s.e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{B}:=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,2})$ en est une famille génératrice.
De plus, $\mathscr{B}$ est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathscr{B}$ est une base de F et $\dim(F)=\operatorname{Card}(\mathscr{B})=3$.
Montrons que F est stable par produit. Pour toutes $M=\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ 0 & z\end{smallmatrix}\right)$ et $M'=\left(\begin{smallmatrix}x' & y'\\ 0 & z'\end{smallmatrix}\right)$ de F :

$$M\times M'=\begin{pmatrix}x\,x' & x\,y'+y\,z'\\ 0 & z\,z'\end{pmatrix}\in F.$$

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1, ne contenant pas I_n et stable par produit.

a. Rappeler la valeur de $E_{i,j}\times E_{k,\ell}$, avec $i,j,k,\ell\in[\![1,n]\!]$.
On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i,j), qui vaut 1.

Solution. $\forall\, i,j,k,\ell\in[\![1,n]\!],\ E_{i,j}\times E_{k,\ell}=\delta_{j,k}\,E_{i,\ell}$.

b. Montrer que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=F\oplus\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

Solution. Montrons que F et $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\dim(F)+\dim\left(\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)\right)=(n^2-1)+1=n^2$
$=\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$.
- Montrons que $F\cap\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)=\{0_n\}$.
L'inclusion $\supset$ est immédiate. Prenons $M\in F\cap\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Cette matrice s'écrit $M=\lambda\,\mathrm{I}_n$. **Par l'absurde, si on avait $\boldsymbol{\lambda\neq 0}$,** alors la matrice $M'=\frac{1}{\lambda}M=\mathrm{I}_n$ serait aussi dans F : c'est exclu par hypothèse. **C'est donc que $\boldsymbol{\lambda=0}$,** et donc que $M=0_n$. L'inclusion $\subset$ est démontrée.

3) **a.** Soit $M,M'\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p:\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le projecteur sur $\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$ parallèlement à F.
Montrer que : $p(M\,M')=p(M)\,p(M')$.

Solution. Prenons $M,M'\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et décomposons-les sur $F\oplus\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$; il existe $A,A'\in F$, $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$ tels que :

$$M=A+\lambda\,\mathrm{I}_n\quad\text{et}\quad M'=A'+\lambda'\,\mathrm{I}_n.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}M\,M'&=(A+\lambda\,\mathrm{I}_n)\times\left(A'+\lambda'\,\mathrm{I}_n\right)\\ &=(AA'+\lambda A'+\lambda' A)+(\lambda\,\lambda')\,\mathrm{I}_n.\end{aligned}\qquad(*)$$

Comme F est stable par $\times$, $AA'\in F$,
et comme F est un s.e.v., $AA'+\lambda A'+\lambda' A\in F$;
et évidemment, $(\lambda\,\lambda')\,\mathrm{I}_n\in\operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n)$.
L'égalité $(*)$ montre donc que :

$$\begin{aligned}p(M\,M')&=(\lambda\,\lambda')\,\mathrm{I}_n=(\lambda\,\mathrm{I}_n)\times(\lambda'\,\mathrm{I}_n)\\ &=p(M)\times p(M').\end{aligned}$$

b. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $M^2\in F$, alors $M\in F$.

Solution. Soulignons que $M\in F$ si et seulement si $p(M)=0_n$.
Supposons que $M^2\in F$: alors $p(M^2)=0_n$.
D'autre part, en notant $p(M)=\lambda\,\mathrm{I}_n$, d'après la question précédente :

$$p(M^2)=(\lambda\,\mathrm{I}_n)^2=\lambda^2\,\mathrm{I}_n.$$

On en déduit que $\lambda^2=0$, donc que $\lambda=0$, d'où $p(M)=0_n$, et ainsi $M\in F$.

4) Déduire des questions précédentes que $E_{i,j}\in F$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, puis conclure.

Solution.

- Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$ quelconques.
  ↪ **Si $\boldsymbol{i\neq j}$:** on a $E_{i,j}^2=0_n\in F$, donc d'après **Q3b**, $E_{i,j}\in F$.
  ↪ **Si $\boldsymbol{i=j}$:** on peut considérer $k\in[\![1,n]\!]$ différent de i car $n\geqslant 2$. En utilisant que $E_{i,i}=E_{i,k}\times E_{k,i}$, comme $E_{i,k}$ et $E_{k,i}$ sont dans F comme on vient de le voir, $E_{i,i}$ l'est également, toujours d'après **Q3b**.

  Dans tous les cas, $E_{i,j}\in F$.
- F contient la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $F=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci contredit le fait que $\mathrm{I}_n\notin F$.
Conclusion. Si $n\geqslant 2$, il n'existe pas de sous-espace vectoriel F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2-1, stable par produit et ne contenant pas I_n.

5) Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1.
Est-il stable par produit ?

Solution. L'ensemble F dont il est question est le noyau de $\mathrm{tr}\colon\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. C'est donc un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Par le théorème du rang :

$$\dim(F) = \dim\big(\operatorname{Ker}(\mathrm{tr})\big) = \dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big) - \dim\big(\operatorname{Im}(\mathrm{tr})\big).$$

$\operatorname{Im}(\mathrm{tr})$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$: cela ne peut être que $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$.
Comme $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n \neq 0$, c'est que $\operatorname{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
Finalement, $\dim(F) = n^2-1$ et $\mathrm{I}_n \notin F$.

L'espace F ne peut pas être stable par produit car cela contredirait le résultat de **Q4**.

■ Exercice mineur

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad \cos(t)\,y + \sin(t)\,y' = -\cos(t)\sin(t).$$

Déterminer l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Solution. L'équation différentielle (E) est linéaire, d'ordre 1, à coefficients variables et avec second membre, **et présente une <u>singularité</u> en $t=0$.**
On la résout d'abord sur $I^+ := \left]0, \pi/2\right[$, ensuite sur $I^- := \left]-\pi/2, 0\right[$, puis on essaie de recoller les solutions en $t=0$.

1) Sur $I^+ = \left]0, \pi/2\right[$, on a :

$$(E) \iff y' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,y = -\cos(t).$$

- **Équation homogène :** la fonction $a\colon t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$ a pour primitive $A\colon t \mapsto \ln\big|\sin(t)\big| = \ln\big(\sin(t)\big)$ sur I^+, et $\mathrm{e}^{-A(t)} = \dfrac{1}{\sin(t)}$.
  On obtient : $\mathscr{S}(H, I^+) = \left\{ t \mapsto \dfrac{A}{\sin(t)}\ ; A \in \mathbb{R} \right\}$.
- **Solution particulière :** par la méthode de variation de la constante.
  Soit $\lambda \in \mathscr{D}(I_+, \mathbb{R})$ et $y : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{\sin(t)}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathrm{I}^+,\quad y'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,y(t) &= \frac{\lambda'(t)\sin(t) - \lambda(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{\cos(t)\,\lambda(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{\lambda'(t)}{\sin(t)}.\end{aligned}$$

En injectant dans (E) :

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}(E, I^+) &\iff \forall t \in I^+,\ \frac{\lambda'(t)}{\sin(t)} = -\cos(t) \\ &\iff \forall t \in I^+,\ \lambda'(t) = -\cos(t)\sin(t) \\ &\Longleftarrow \forall t \in I^+,\ \lambda(t) = \frac{1}{2}\cos^2(t) \\ &\iff \forall t \in I^+,\ y(t) = \frac{\cos^2(t)}{2\sin(t)}.\end{aligned}$$

La fonction $y_p : t \mapsto \dfrac{\cos^2(t)}{2\sin(t)}$ est (un exemple de) solution particulière de (E) sur I^+.

- **Solution générale sur I^+ :**

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(E, I^+) &= y_p + \mathscr{S}(H, I^+) \\ &= \left\{ t \mapsto \frac{\cos^2(t) + 2A}{2\sin(t)}\ ; A \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

2) Sur $I^- = \left]\pi/2, 0\right[$, on trouve de façon analogue :

$$\mathscr{S}(E, I^-) = \left\{ t \mapsto \frac{\cos^2(t) + 2B}{2\sin(t)}\ ; B \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) Recollement des solutions. Pour chercher les solutions de (E) sur I, on procède comme d'habitude par **analyse-synthèse.**

- **Analyse.** Soit y une solution de (E) sur I. Étant solution sur I^+ et I^-, il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(t) + 2A}{\sin(t)} & \text{si } t > 0, \\[2mm] \dfrac{\cos^2(t) + 2B}{\sin(t)} & \text{si } t < 0.\end{cases}$$

  y doit avoir une limite finie en 0 ; or le sinus au dénominateur tend vers 0 : il est donc nécessaire que le numérateur tende également vers 0 (sinon y aurait une limite infinie à gauche ou à droite de 0).
  Cela impose que $A = B = -1/2$.
  De plus, en $t = 0$, l'équation (E) donne directement $y(0) = 0$.

  Nécessairement : $y(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(t) - 1}{\sin(t)} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0.\end{cases}$

- **Synthèse.** Étudions la fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(t) - 1}{\sin(t)} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0.\end{cases}$$

  Cette fonction est clairement dérivable sur les <u>**ouverts**</u> I^+ et I^-, où elle est solution de (E).
  Reste à voir qu'elle est dérivable en 0 ; à l'aide de son taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\forall t \in I \setminus \{0\},\quad \frac{y(t) - y(0)}{t} &= \frac{\cos^2(t) - 1}{t\sin(t)} = \frac{\big(\cos(t) - 1\big)\big(\cos(t) + 1\big)}{t\sin(t)} \\ &\underset{t \to 0}{\sim} \frac{-t^2/2 \times 2}{t^2} = -1 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -1, \quad \text{limite finie.}\end{aligned}$$

  y est bien dérivable sur I. De façon immédiate, elle vérifie (E) en $t = 0$ également.
  Il s'agit bien d'une solution de (E) sur I tout entier.

Conclusion générale. L'équation (E) admet une unique solution sur $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$:

$$y :\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\cos^2(t) - 1}{\sin(t)} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0.\end{cases}$$

(s'il n'y avait pas eu de singularité en $t = 0$, on aurait trouvé une infinité de solutions, constituant une droite affine)